

ZADANIE 1 (1 PKT)

Liczba $\log_{0,5} 5 \cdot \log_{0,2} 2$ jest równa

A) -1

B) 1

C) 10

D) 0,1

ZADANIE 2 (1 PKT)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{5n^2 - 3n - 7}{9 + 4n - 3n^2}$ dla każdej liczby $n \geq 1$. Granica tego ciągu jest równa

A) 5

B) $-\frac{5}{3}$ C) $-\frac{7}{9}$ D) $-\frac{1}{3}$

ZADANIE 3 (1 PKT)

Prosta dana równaniem $y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$ jest prostopadła do stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 4$ w punkcie

A) (2, -2)

B) (1, -3)

C) (0, -4)

D) (-1, -5)

ZADANIE 4 (1 PKT)

Wskaż wektor równoległy do wektora $\vec{v} = [-72, 96]$

A) [48, 36]

B) [45, -60]

C) [-42, 64]

D) [76, -57]

$$-\frac{72}{45} = \frac{96}{60}$$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \underline{1 \sim}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow U = U_x = U_y \quad \underline{\infty}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad \emptyset$$

$$U = 0$$

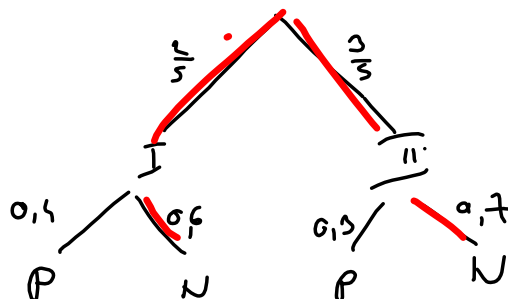
$$U_x \neq 0 \vee U_y \neq 0$$

ZADANIE 5 (2 pkt)

Dwa zakłady pracy produkują takie same akumulatory, przy czym stosunek liczby akumulatorów produkowanych dziennie przez pierwszy zakład do liczby akumulatorów produkowanych dziennie przez drugi zakład jest równy $\frac{2}{3}$. Badania wykazały, że niektóre z wyprodukowanych akumulatorów mają podwyższoną pojemność, przy czym własność tą ma 40% akumulatorów pochodzących z pierwszego zakładu i 30% akumulatorów pochodzących z drugiego zakładu. Oblicz jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany akumulator pochodzący z dziennej produkcji obu zakładów nie ma podwyższonej pojemności.

$$\frac{2x}{2x} \quad \frac{1}{11}$$

$$5x \quad 1$$



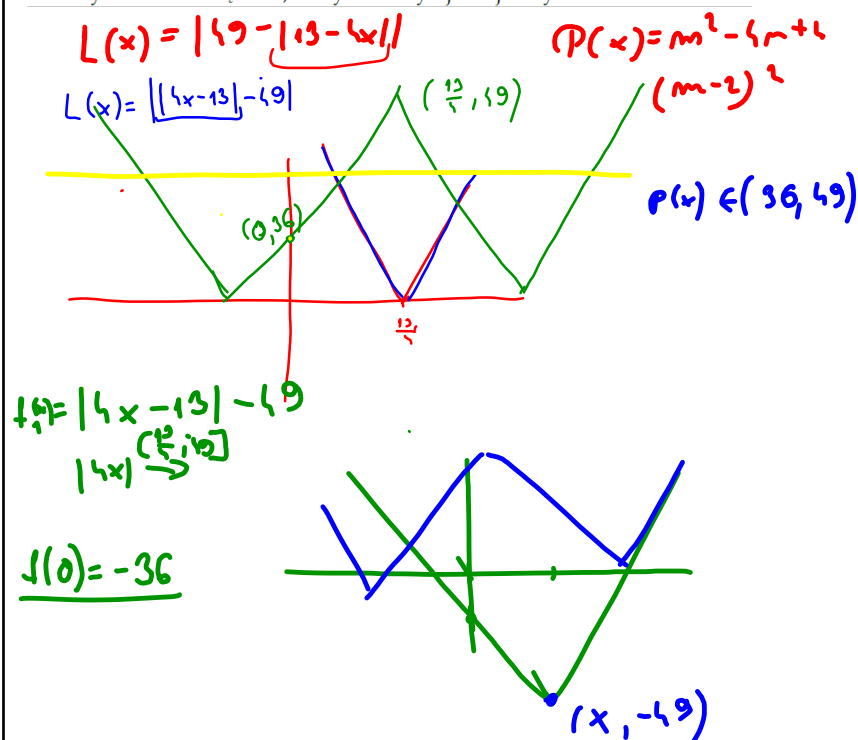
$$P(N) = 0,61$$

ZADANIE 6 (3 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$|49 - |13 - 4x|| - 4 = m(m - 4)$$

ma cztery różne rozwiązania, których iloczyn jest ujemny.

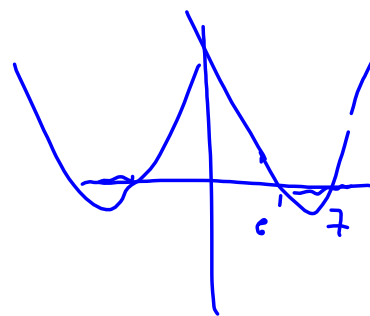


$$(m-2)^2 \in (36, 49)$$

$$|m-2| \in (6, 7)$$

$$m-2 \in (-7, -6) \cup (6, 7)$$

$$m \in (-5, -4) \cup (8, 9)$$



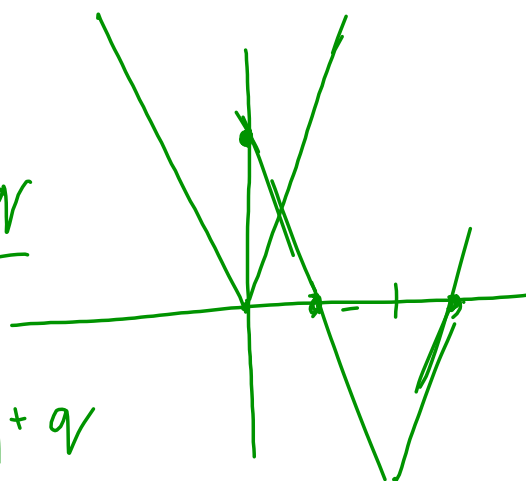
$$|4x|$$

$$f(x) \xrightarrow{[p,q]} f(x-p) + q$$

$$|4x| \xrightarrow{[p,q]} |4(x-p)| + q$$

$$|4x - 13| - 49$$

$$p = \frac{13}{4} \quad q = -49$$



ZADANIE 7 (3 PKT)

Suma długości wszystkich wysokości trójkąta ABC jest 9 razy większa od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.



$$h_a + h_b + h_c = 9r$$

$$\frac{2P}{a} + \frac{2P}{b} + \frac{2P}{c} = 9r$$

$$2P \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 9 \cdot \frac{2P}{a+b+c} \quad | : 2P > 0$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{9}{a+b+c}$$

$$\frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{9}{a+b+c}$$

$$9abc = (ab+bc+ac)(a+b+c)$$

$$b(a-c) + a(b-c) + c(a-b) = 0$$

$$\frac{a+b+c}{9} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$\sin a = \sin b \quad \Rightarrow \quad a = b = c$$

$$\frac{x^2 + 1x}{x^2 + 1x}$$

$$n \dots -$$

ZADANIE 8 (3 PKT)

Wykaż, że $\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\frac{1}{8}$.

$$L = \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ}{2 \sin 40^\circ} =$$

$$\frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ}{2 \sin 40^\circ} = \frac{2 \sin 160^\circ \cos 160^\circ}{2 \sin 40^\circ} = \frac{\sin 320^\circ}{\sin 40^\circ} =$$

$$\frac{\sin 320^\circ}{\sin 40^\circ} = -\frac{1}{8}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{90} - 2 \right)$$

ZADANIE 9 (5 PKT)

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest opisany równaniem

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 29 = 0.$$

Punkty styczności tego okręgu z bokami AC i BC trójkąta ABC leżą na prostej o równaniu: $x - y - 7 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C trójkąta ABC .

$$(x-5)^2 - 25 + (y+3)^2 - 9 + 29 = 0$$

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 5$$

$$\begin{cases} I: (x-5)(3-5) + (y+3)(-4+3) = 5 \\ II: (x-5)(6-5) + (y+3)(-1+3) = 5 \end{cases}$$

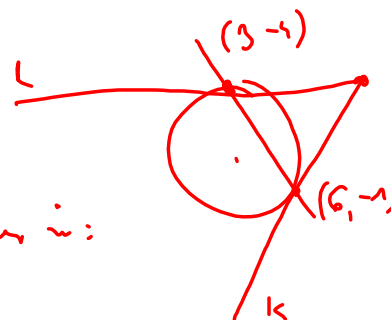
$$-2x - y + 2 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$x + 2y - 4 = 0$$

$$C(0, 2)$$

$$-3x = 0 \quad y = 2$$

$$x = 0$$



ZADANIE 10 (4 PKT)

Wykres funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 7$ przesunięto o wektor $\vec{v}$ i wyniku tej operacji otrzymano wykres, który jest symetryczny względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wektora $\vec{v}$.

$$f(x-p) + q = -f(-x-p) - q$$

$$g(-x) = -g(x)$$

$$f(x-p) + f(-x-p) + 2q = 0$$

$$= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x^3 - 3px^2 \dots -x^3 - 3px^2$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow p = -\frac{2b}{6a} \quad q = f'(p)$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = -\frac{2b}{6a} = \boxed{-\frac{b}{3a}} = p$$

$$f\left(x + \frac{b}{3a}\right) - f\left(-\frac{b}{3a}\right) = ax\left(x^2 - \frac{c}{3a}\right)$$

ZADANIE 10 (4 PKT) $8 - 24 + 6 - 7 = -17 = f(2)$

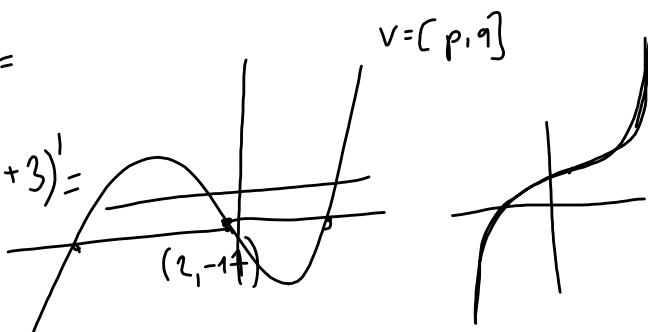
Wykres funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 7$ przesunięto o wektor $\vec{v}$ i wyniku tej operacji otrzymano wykres, który jest symetryczny względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wektora $\vec{v}$.

$$f(x-p) + q =$$

$$f''(x) = (3x^2 - 12x + 3)' =$$

$$= 6x - 12$$

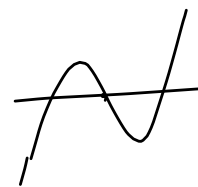
$$\boxed{x=2} \quad y=$$



$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 7 \xrightarrow{(-2, 17)} \underbrace{(x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 3(x+2)}_{g(x) = f(x+2) - 17}$$

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3)$$

$$g(-x) = -x^3 + 9x = -g(x) \Rightarrow (0,0) \text{ jest sym.}$$



ZADANIE 11 (4 PKT)

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{3}$. Wyrazy a_1, a_2, a_3 są – odpowiednio – dziewiątym, trzecim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1 .

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{3} \\ a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_3 = a_1 \\ b_3 = a_2 \\ b_1 = a_3 \end{cases} \quad b_n \text{ ok } \Rightarrow \begin{cases} b_3 = b_1 + 8n \\ b_3 = b_1 + 2n \quad | \cdot (-4) \end{cases} \begin{cases} a_1 = a_3 + 8n \\ -4a_2 = -4a_3 - 8n \end{cases}$$

$$-4a_2 + a_1 = -3a_3$$

$$\begin{cases} a_2^2 = a_1 a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{3} \\ a_1 = -3a_3 + 4a_2 \end{cases} \quad F \cup J \quad a_1 =$$

ZADANIE 11 (4 PKT)

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{3}$. Wyrazy a_1, a_2, a_3 są – odpowiednio – dziewiątym, trzecim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1 .

$$\begin{cases} a_1 + a_1 - 6n + a_1 - 8n = \frac{13}{3} \quad | \cdot 3 \\ (a_1 - 6n)^2 = (a_1)(a_1 - 8n) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= b_3 + (1-3)n \\ b_1 &= b_3 - 8n \\ a_3 &= a_1 - 8n \end{aligned}$$

$$9a_1 - 42n = 13$$

$$\cancel{a_1} - 12n \cancel{a_1} + 36n^2 = \cancel{a_1} - 8a_1 n$$

$$9n^2 = a_1 n$$

$$9n = a_1$$

$$n = \frac{a_1}{9}$$

$$n > 0$$

$$n = \frac{1}{3}$$

$$a_1 = 3$$

$$\sin(2) \cdot \sin(2-15) = 9(2)$$

$$2021 : 2022 : 2023 \Big| \overset{!}{=} 2022$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{a \quad (a-1) \quad (a+1)}$$

$$a(a^2-1) = a^3 - a < a^3$$

ZADANIE 13 (5 PKT)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^5 + ax^4 - 18x^3 + bx$ przez trójmian $x^2 - x - 6$ jest równa $48 - 11x$. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian $x^2 + x - 6$.

$$W(x) = \underbrace{(x^2 - x - 6)}_{(x-3)(x+2)} Q(x) + (48 - 11x) = 2x^5 + ax^4 - 18x^3 + bx$$

$$\begin{aligned} x_1 = 3 & \quad W(3) = 15 = 81a + 3b \\ x_2 = -2 & \quad W(-2) = 70 = -64 + 16a + 144 - 2b \Rightarrow \\ & \quad -10 = 16a - 2b \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 6 + 27a = 5 \\ -6 + 8a = -5 \\ \hline a = 0 \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} b = 5 \\ a = 0 \end{array}}$$

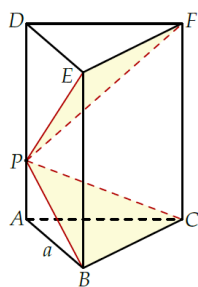
$$\begin{aligned} W(x) &= (x+3)(x-2) \cdot Q_2(x) + a'x + b' \\ W(x) &= (x^2 + x - 6) \cdot Q_2(x) + a'x + b' \\ \left\{ \begin{array}{l} W(-3) = -3a' + b' = -15 \\ W(2) = 2a' + b' = -70 \end{array} \right. & \quad \begin{aligned} W(-3) &= 2 \cdot 243 - 18 \cdot 27 + 5 \cdot (-3) = -15 \\ W(2) &= 2^5 - 9 \cdot 2^4 + 10 = -70 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5a' &= 55 \\ a' &= -11 \\ b' &= -70 + 22 = -48 \end{aligned}$$

$$\boxed{R(x) = -11x - 48}$$

ZADANIE 14 (5 PKT)

Przez punkt P krawędzi bocznej AD graniastopu prawidłowego trójkątnego $ABCDEF$ o krawędzi podstawy równej a poprowadzono dwie płaszczyzny. Jedna przechodzi przez przeciwległą krawędź dolnej podstawy i jest nachylona do tej podstawy pod kątem α , a druga przechodzi przez przeciwległą krawędź górnej podstawy i jest nachylona do tej podstawy pod kątem β (zobacz rysunek).

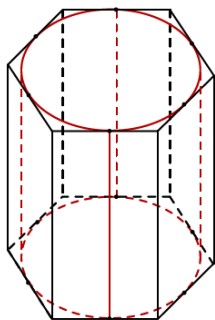


Udowodnij, że objętość ostrosłupa $BCFEP$ jest równa

$$\frac{a^3 \sin(\alpha + \beta)}{4 \cos \alpha \cos \beta}$$

ZADANIE 15 (7 pkt)

Mówimy, że walec jest wpisany w graniastosłup, jeżeli podstawy walca są zawarte w podstawach graniastosłupa, a powierzchnia boczna walca jest styczna do każdej ze ścian bocznych graniastosłupa (zobacz rysunek).



Rozpatrujemy wszystkie graniastosłupy prawidłowe sześciokątne takie, że suma długości promienia i wysokości walca wpisanego w ten graniastosłup jest równa K . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest największa.

$$f(x) = x^3 + (a+2)x^2 - 9x + b$$

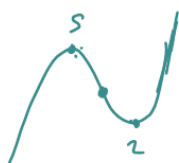
$$a < 0$$

$$S - \text{MAX } (x_5, y_5)$$

$$Z - \text{MIN } (x_2, y_2)$$

$$\frac{y_5 + y_2}{2}$$

$$A(1, -4)$$



$$|x_5 - x_2| = 4$$

$$x_2 - x_5 = 4$$

