

ZADANIE 1 (1 PKT)

Liczba $\log_{0,5} 5 \cdot \log_{0,2} 2$ jest równa

- A) -1 B) 1 C) 10 D) 0,1

ZADANIE 2 (1 PKT)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{5n^2 - 3n - 7}{9 + 4n - 3n^2}$ dla każdej liczby $n \geq 1$. Granica tego ciągu jest równa

- A) 5 B) $-\frac{5}{3}$ C) $-\frac{7}{9}$ D) $-\frac{1}{3}$

ZADANIE 3 (1 PKT)

Prosta dana równaniem $y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$ jest prostopadła do stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 4$ w punkcie

- A) (2, -2) B) (1, -3) C) (0, -4) D) (-1, -5)

ZADANIE 4 (1 PKT)

Wskaż wektor równoległy do wektora $\vec{v} = [-72, 96]$

- A) [48, 36] B) [45, -60] C) [-42, 64] D) [76, -57]

$$-\frac{72}{45} = \frac{96}{60}$$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \underline{1 \sim}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow U = U_x = U_2 \quad \underline{\infty}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad \emptyset$$

$$U = 0$$

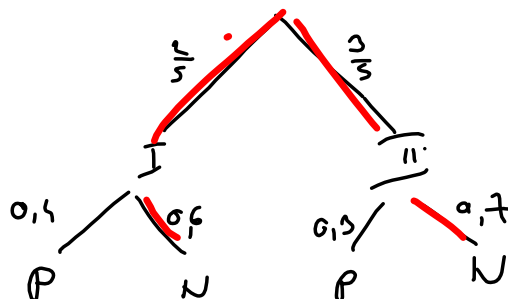
$$U_x \neq 0 \vee U_y \neq 0$$

ZADANIE 5 (2 pkt)

Dwa zakłady pracy produkują takie same akumulatory, przy czym stosunek liczby akumulatorów produkowanych dziennie przez pierwszy zakład do liczby akumulatorów produkowanych dziennie przez drugi zakład jest równy $\frac{2}{3}$. Badania wykazały, że niektóre z wyprodukowanych akumulatorów mają podwyższoną pojemność, przy czym własność tą ma 40% akumulatorów pochodzących z pierwszego zakładu i 30% akumulatorów pochodzących z drugiego zakładu. Oblicz jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany akumulator pochodzący z dziennej produkcji obu zakładów nie ma podwyższonej pojemności.

$$\frac{2x}{2x} \quad \frac{1}{11}$$

$$5x \quad 1$$



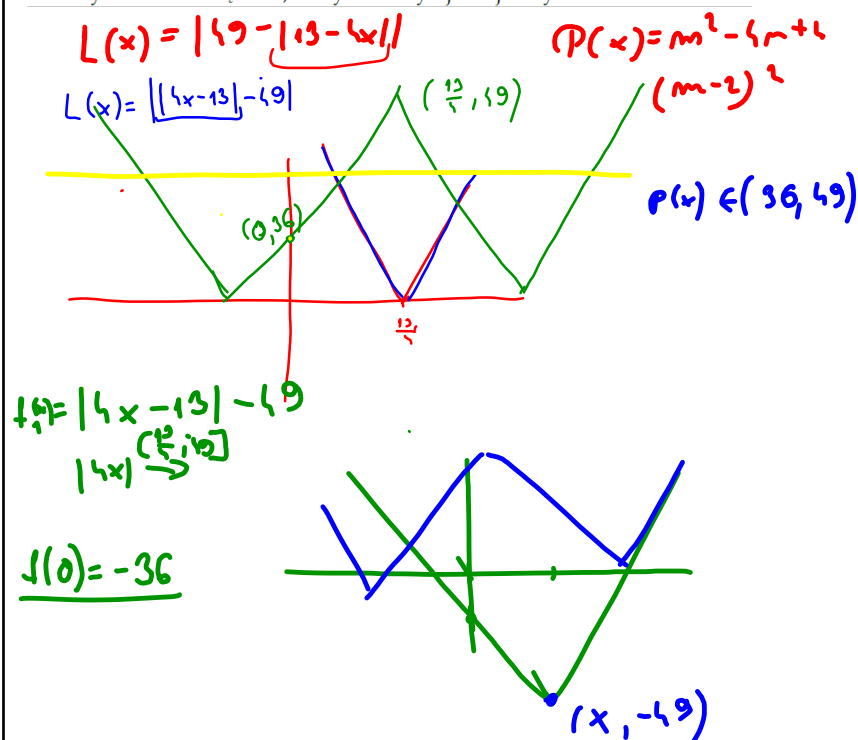
$$P(N) = 0,61$$

ZADANIE 6 (3 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$|49 - |13 - 4x|| - 4 = m(m - 4)$$

ma cztery różne rozwiązania, których iloczyn jest ujemny.

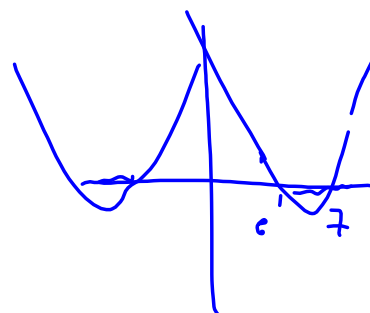


$$(m-2)^2 \in (36, 49)$$

$$|m-2| \in (6, 7)$$

$$m-2 \in (-7, -6) \cup (6, 7)$$

$$m \in (-5, -4) \cup (8, 9)$$



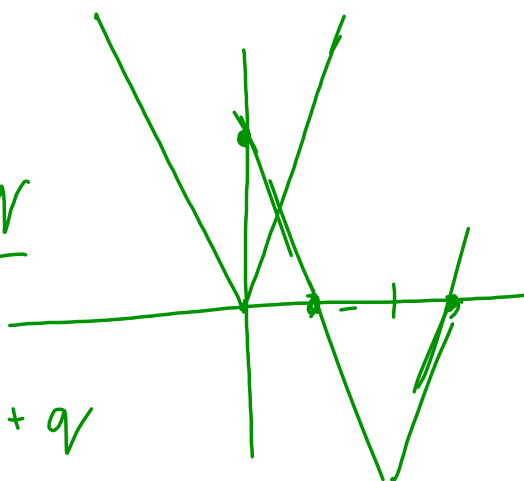
$$|4x|$$

$$f(x) \xrightarrow{[p,q]} f(x-p) + q$$

$$|4x| \xrightarrow{[p,q]} |4(x-p)| + q$$

$$|4x - 13| - 49$$

$$p = \frac{13}{4} \quad q = -49$$



ZADANIE 7 (3 PKT)

Suma długości wszystkich wysokości trójkąta ABC jest 9 razy większa od promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Udowodnij, że trójkąt ABC jest równoboczny.



$$h_a + h_b + h_c = 9r$$

$$\frac{2P}{a} + \frac{2P}{b} + \frac{2P}{c} = 9r$$

$$2P\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 9 \cdot \frac{2P}{a+b+c} \quad | : 2P > 0$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{9}{a+b+c}$$

$$\frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{9}{a+b+c}$$

$$abc = (ab+bc+ac)(a+b+c)$$

$$b(a-c) + a(b-c) + c(a-b) = 0$$

$$\frac{a+b+c}{9} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$\frac{abc}{3} = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$\sin a = \sin b \quad \Rightarrow \quad a = b = c$$

$$\frac{x^2 + 1x}{x^2 + 1x}$$

$$n \dots -$$

ZADANIE 8 (3 PKT)

Wykaż, że $\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\frac{1}{8}$.

$$L = \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ}{2 \sin 40^\circ} =$$

$$\frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ}{2 \sin 40^\circ} = \frac{2 \sin 160^\circ \cos 160^\circ}{2 \sin 40^\circ} = \frac{\sin 320^\circ}{\sin 40^\circ} =$$

$$\frac{\sin 320^\circ}{\sin 40^\circ} = -\frac{1}{8}$$

$$\sin(\sqrt{2} - 2)$$

ZADANIE 9 (5 PKT)

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest opisany równaniem

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 29 = 0.$$

Punkty styczności tego okręgu z bokami AC i BC trójkąta ABC leżą na prostej o równaniu: $x - y - 7 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C trójkąta ABC .

$$(x-5)^2 - 25 + (y+3)^2 - 9 + 29 = 0$$

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 5$$

$$\begin{cases} l: (x-5)(3-5) + (y+3)(-4+3) = 5 \\ k: (x-5)(6-5) + (y+3)(1+3) = 5 \end{cases}$$

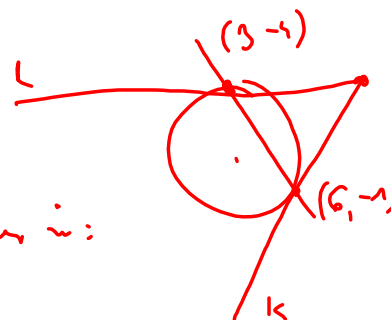
$$-2x - y + 2 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$x + 2y - 4 = 0$$

$$C(0, 2)$$

$$-3x = 0 \quad y = 2$$

$$x = 0$$



ZADANIE 9 (5 PKT)

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest opisany równaniem

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 29 = 0.$$

$$S(5, -3) \quad r = \sqrt{5}$$

Punkty styczności tego okręgu z bokami AC i BC trójkąta ABC leżą na prostej o równaniu: $x - y - 7 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C trójkąta ABC .

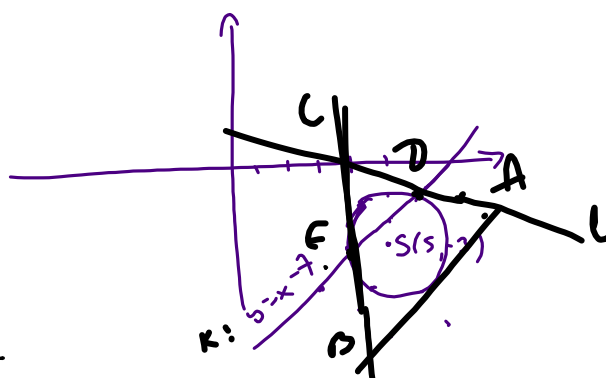
$$y = x - 7$$

$$\begin{cases} o: \\ k: \end{cases}$$

$$D(3, -4)$$

$$E(6, -1)$$

$$\begin{cases} m \ni E \\ l \ni D \\ \Rightarrow C \end{cases}$$



$$\begin{aligned} m: y &= ax + b \\ -4 &= 3a + b \\ b &= -4 - 3a \end{aligned}$$

$$m: y = ax - 4 - 3a$$

ZADANIE 9 (5 PKT)

Okrag wpisany w trójkąt ABC jest opisany równaniem

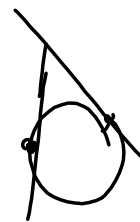
$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 29 = 0.$$

Punkty styczności tego okręgu z bokami AC i BC trójkąta ABC leżą na prostej o równaniu: $x - y - 7 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołka C trójkąta ABC.

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 5$$

$$(-3, -4) \quad (6, -1)$$

$$a^2 = a \cdot a$$



$$(x-5)(-3-5) + (y+3)(-1+3) = 5$$

$$(x-5)(6-5) + (y+3)(-1+1) = 5$$

$$-2(x-5) - y - 3 = 5$$

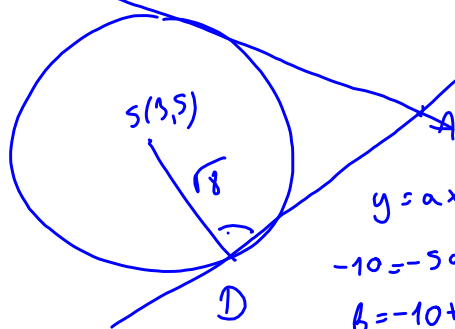
$$y = -2x + 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x$$

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = 8$$

$$A(-5, -10)$$

$$S(3, 5)$$



$$y = ax + b$$

$$-10 = -5a + b$$

$$b = -10 + 5a$$

$$y = ax - 10 + 5a$$

$$ax - y - 10 + 5a = 0$$

$$\frac{|a \cdot 3 - 5 - 10 + 5a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{8} \quad | \sqrt{a^2 + 1}$$

$$|8a - 15| = \sqrt{8(a^2 + 1)} \quad |(\quad)^2$$

$$64a^2 - 240a + 225 = 8a^2 + 8$$

$$56a^2 - 240a + 217 = 0$$

$$a_1 \quad a_2$$

$$p(ES) \perp p(EL) \quad E(3, -4) \quad D(6, -1)$$

$$y = \frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$$

$$y = -2(x-3) - 4$$

$$p(DS) \perp p(DC)$$

$$y = -2x + 2$$

$$p(DS): y = 2(x-6) - 1 = 2x - 13$$

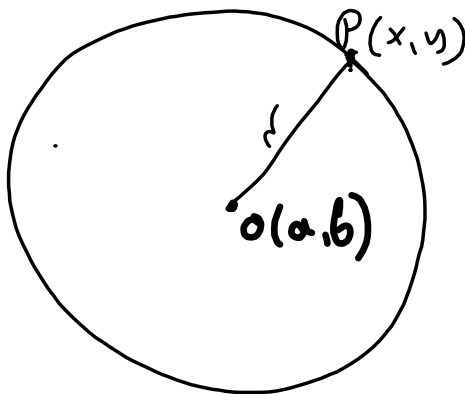
$$y = -\frac{1}{2}(x-6) - 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

$$(0, 2)$$

$$x=0 \quad y=2$$



$$|OP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad (1)$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = |OP|^2 = r^2$$

$$r_5 = \sqrt{(5-x)^2 + (-3-x+7)^2}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

ZADANIE 10 (4 PKT)

Wykres funkcji $f(x) = \underline{x^3} - \underline{6x^2} + \underline{3x}$ przesunięto o wektor $\vec{v}$ i wyniku tej operacji otrzymano wykres, który jest symetryczny względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wektora $\vec{v}$.

$$f(x-p)+q = -f(-x-p)-q$$

$$g(-x) = -g(x)$$

$$\boxed{f(x-p)+f(-x-p)+2q=0} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\underline{x^3 - 3px^2} \quad \dots \quad -x^3 - \underline{3px^2}$$

$$\rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow p = -\frac{2b}{6a} \quad q = f'(p) =$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = -\frac{2b}{6a} = \boxed{-\frac{b}{3a}} = p$$

$$\boxed{f\left(x + \frac{b}{3a}\right) - f\left(-\frac{b}{3a}\right) = ax(x^2 - \dots)}$$

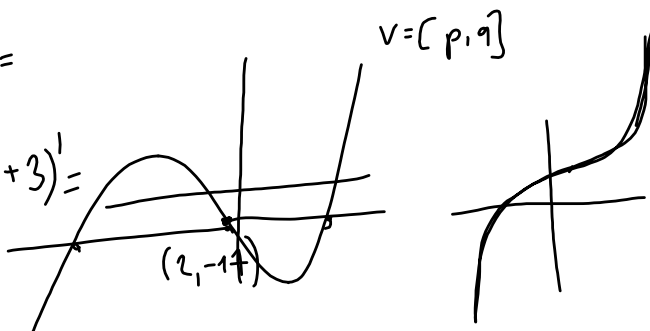
ZADANIE 10 (4 PKT) $8 - 21 + 6 - 7 = -14 = f(2)$

Wykres funkcji $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 7$ przesunięto o wektor $\vec{v}$ i wyniku tej operacji otrzymano wykres, który jest symetryczny względem początku układu współrzędnych. Wyznacz współrzędne wektora $\vec{v}$.

$$f(x-p)+q=$$

$$f'(x) = (3x^2 - 12x + 3)' = 6x - 12$$

$$\boxed{x=2} \quad y=$$



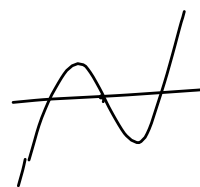
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 7 \xrightarrow{(-2, 14)} (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 3(x+2) - 14$$

$$(0,0)$$

$$g(x) = f(x+2) - 14$$

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3)$$

$$g(-x) = -x^3 + 9x = -g(x) \Rightarrow (0,0) \text{ jest sym.}$$



ZADANIE 11 (4 PKT)

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{3}$. Wyrazy a_1, a_2, a_3 są – odpowiednio – dziewiątym, trzecim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1 .

$$\vee \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{3} \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_3 = a_1 \\ b_3 = a_2 \\ b_1 = a_3 \end{cases} \quad b_n \text{ a.k.} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b_3 = b_1 + 8r \\ b_3 = b_1 + 2r \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = a_3 + 8r \\ -4a_2 = -4a_3 - 8r \end{cases}$$

$$-4a_2 + a_1 = -3a_3$$

$$\left. \begin{cases} a_2^2 = a_1 a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{3} \\ a_1 = -3a_3 + 4a_2 \end{cases} \right\} \quad F \vee J$$

$$a_1 =$$

ZADANIE 11 (4 PKT)

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{13}{3}$. Wyrazy a_1, a_2, a_3 są – odpowiednio – dziewiątym, trzecim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1 .

$$\begin{cases} a_1 + a_1 - 6n + a_1 - 8n = \frac{13}{3} \quad | \cdot 3 \\ (a_1 - 6n)^2 = (a_1)(a_1 - 8n) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 + (1-3)n \\ a_1 &= a_1 - 8n \\ a_3 &= a_1 - 8n \end{aligned}$$

$$9a_1 - 42n = 13$$

$$a_1 - 12n a_1 + 36n^2 = a_1^2 - 9a_1 n$$

$$9n^2 = a_1 n$$

$$9n = a_1$$

$$n = \frac{a_1}{9}$$

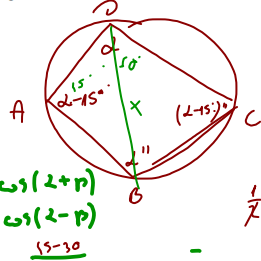
$$n > 0$$

$$n = \frac{1}{3}$$

$$a_1 = 3$$

ZADANIE 12 (5 PKT)

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu $R = 7\sqrt{2}$. Kąt ADC tego czworokąta jest ostry i jego miara jest o 15° większa od miary kąta BAD . Iloczyn sinusów wszystkich kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ jest równy $\frac{3}{8}$. Oblicz długości przekątnych AC i BD tego czworokąta.



$$2\alpha < 90^\circ$$

$$\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 (2\alpha - 15^\circ) = \frac{3}{8}$$

$$\sin 2\alpha \sin (2\alpha - 15^\circ) = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{2} (\cos(15^\circ) - \cos(2\alpha - 15^\circ)) = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos 15^\circ \cos 30^\circ + \sin 15^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos(2\alpha - 15^\circ) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$-\cos 75^\circ =$$

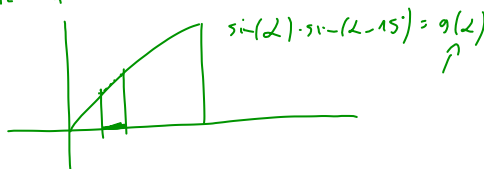
$$\cos(180^\circ - 75^\circ) = -\cos 75^\circ = \cos 105^\circ$$

$$2\alpha - 15^\circ = 105^\circ + k \cdot 360^\circ \quad \vee \quad 2\alpha - 15^\circ = -105^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

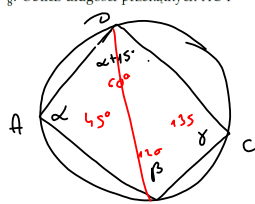
$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$2\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$



ZADANIE 12 (5 pkt) $\angle_1 \in I$ $\frac{BD}{r} = 2\sqrt{2} \cdot 1$

Czworokąt ABCD jest wpisany w okrąg o promieniu $r = 7\sqrt{2}$. Kąt ADC tego czworokąta jest ostry i jego miara jest o 15° większa od miary kąta BAD. Iloczyn sinusów wszystkich kątów wewnętrznych czworokąta ABCD jest równy $\frac{3}{8}$. Oblicz długości przekątnych AC i BD tego czworokąta.



$$\alpha + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - \alpha$$

$$\alpha + 15^\circ + \beta = 180^\circ \quad \beta = 180^\circ - \alpha - 15^\circ$$

$$\sin \alpha \cdot \sin(\alpha + 15^\circ) = \frac{3}{8}$$

$$\sin \alpha \sin(\alpha + 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{2}(\cos(\alpha + 15^\circ) - \cos \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad | \cdot -2$$

$$\cos \alpha - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}$$

$$0 < \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 2}{4}$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos(45^\circ + 15^\circ) =$$

$\sin 15^\circ$
 $\cos 15^\circ$
 $\sin 75^\circ$
 $\cos 75^\circ$

$$\cos \alpha - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \alpha = 105^\circ = \frac{7\pi}{12}$$

$$2\alpha + \frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\frac{(m-1)(m)(m+1)}{3} \neq 2022^3$$

$$\frac{2022 \cdot 2022 \cdot 2022}{3} = 2022^3$$

$$\frac{a(a-1)(a+1)}{3} = \frac{a(a^2-1)}{3} = \frac{a^3-a}{3} < a^3$$

ZADANIE 13 (5 PKT)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^5 + ax^4 - 18x^3 + bx$ przez trójmian $x^2 - x - 6$ jest równa $48 - 11x$. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian $x^2 + x - 6$.

$$W(x) = \frac{(x^2 - x - 6)Q(x) + (48 - 11x)}{(x-3)(x+2)} = 2x^5 + ax^4 - 18x^3 + bx$$

$$\begin{aligned} x_1 = 3 & \quad W(3) = 15 = 81a + 3b \\ x_2 = -2 & \quad W(-2) = 70 = -64 + 16a + 144 - 2b \Rightarrow \\ & \quad -10 = 16a - 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 + 27a &= 5 \\ -6 + 8a &= -5 \\ \hline a &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} b &= 5 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

$$W(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{(x^2+x-6)} \cdot Q_2(x) + a'x + b'$$

$$\begin{aligned} W(-3) &= -3a' + b' = -15 & W(-3) &= -2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 15 = -15 \\ W(2) &= 2a' + b' = -70 & W(2) &= 2^6 - 9 \cdot 2^4 + 10 = -70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5a' &= 55 \\ a' &= -11 \\ b' &= -70 + 22 = -48 \end{aligned}$$

$$R(x) = -11x - 48$$

ZADANIE 13 (5 PKT)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 2x^5 + ax^4 - 18x^3 + bx$ przez trójmian $x^2 - x - 6$ jest równa $48 - 11x$. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian $x^2 + x - 6$.

$$W(x) = \underbrace{P(x)}_{?} \cdot (x^2 - x - 6) + 48 - 11x = 2x^5 + ax^4 - 18x^3 + bx$$

$$W(x) = Q(x) \cdot (x^2 + x - 6) + \underbrace{px + q}_{R(x) : \text{st } R(x) < \text{st } (x^2 + x - 6)}$$

$$p, q = ?$$

$$-10 = 16a - 2b$$

$$\begin{cases} 8a - b = -5 \\ 27a + b = 5 \end{cases}$$

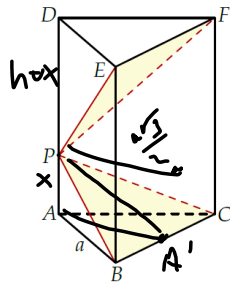
$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 5 \end{cases}$$

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$\text{st } R(x) < \text{st } P(x)$$

ZADANIE 14 (5 PKT)

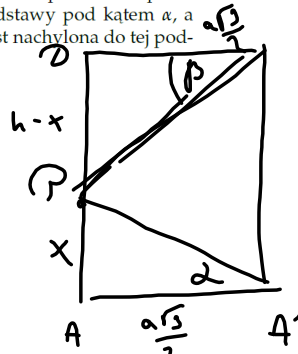
Przez punkt P krawędzi bocznej AD graniastopu prawidłowego trójkątnego $ABCDEF$ o krawędzi podstawy równej a poprowadzono dwie płaszczyzny. Jedna przechodzi przez przeciwległą krawędź dolnej podstawy i jest nachylona do tej podstawy pod kątem α , a druga przechodzi przez przeciwległą krawędź górnej podstawy i jest nachylona do tej podstawy pod kątem β (zobacz rysunek).



Udowodnij, że objętość ostrosłupa $BCFEP$ jest równa

$$\frac{a^3 \sin(\alpha + \beta)}{4 \cos \alpha \cos \beta}$$

$$V = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{4 \cos \alpha \cos \beta}$$



$$h = x + y$$

$$x = \tan \alpha \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \tan \beta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

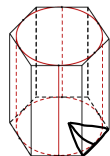
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} (\tan \alpha + \tan \beta)$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta} \right)$$

$$V_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan \alpha$$

ZADANIE 15 (7 PKT)

Mówimy, że walec jest wpisany w graniastop, jeżeli podstawy walca są zawarte w podstawach graniastopu, a powierzchnia boczna walca jest styczna do każdej ze ścian bocznych graniastopu (zobacz rysunek).



$$D: K$$

$$r + H = K$$

$$V = P_p \cdot H = 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H$$

$$r = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

Rozpatrujemy wszystkie graniastopy prawidłowe sześciokątne takie, że suma długości promienia i wysokości walca wpisanego w ten graniastop jest równa K . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego z rozważanych graniastopów, którego objętość jest największa.

$$V = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{K^2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot H$$

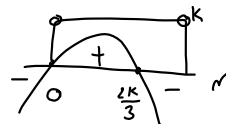
$$V = 2\sqrt{3} \cdot H = 2\sqrt{3} r^2 (K - r)$$

$$\begin{cases} V(r) = 2\sqrt{3} r^2 K - 2\sqrt{3} r^3 \\ r \in (0, K) \end{cases}$$

$$V'(r) = 4\sqrt{3} K r - 6\sqrt{3} r^2 = -6\sqrt{3} r \left(r - \frac{2K}{3} \right)$$

r	$(0, \frac{2}{3}K)$	$\frac{2}{3}K$	$(\frac{2}{3}K, K)$
V'	+	0	-
V	↗	↘	↘

$y_{\max}(\frac{2}{3}K)$



$$r = \frac{2}{3}K$$

$$P_c = 12 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 12 H$$

$$P_c = \frac{8\sqrt{3}}{3} K^2$$

$f(x) = x^3 + (a+2)x^2 - 9x + b$

$a < 0$

$S - \text{MAX } (x_5, y_5)$
 $Z - \text{MIN } (x_2, y_2)$

$\frac{y_5 + y_2}{2}$

$A(1, -4)$

$|x_5 - x_2| = 4$

$x_2 - x_5 = 4$

$S,$
 $Z,$
 $a,$
 $b,$