

2014/2015-III

Ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ losujemy kolejno bez zwracania k liczb, otrzymując ciąg

$$(a_1, a_2, \dots, a_k).$$

Wiedząc, że $3 \leq k \leq n$, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

A: a_k jest największą liczbą wśród wylosowanych;

B: a_k jest podzielna przez 3;

C: $a_1 + a_2 + \dots + a_k > \frac{1}{2}k(k+1)$.

$$n=5$$

$$k=3$$

n - los k z n $k \in P$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \overline{n} = \binom{n}{k} \cdot k!$$

A - a_k - n k

$$\overline{A} = \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot (k-1)!$$

$$P(A) = \frac{\binom{n}{k} \cdot 1 \cdot (k-1)!}{\binom{n}{k} \cdot k!} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{\overline{n}}{k} = \frac{(k-1)!}{k}$$

2014/2015-III

Ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ losujemy kolejno bez zwracania k liczb, otrzymując ciąg

$$(a_1, a_2, \dots, a_k).$$

Wiedząc, że $3 \leq k \leq n$, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

A: a_k jest największą liczbą wśród wylosowanych;

B: a_k jest podzielna przez 3;

C: $a_1 + a_2 + \dots + a_k > \frac{1}{2}k(k+1)$.

$$\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$$

$$\frac{\binom{n}{3}}{k}$$

$$B - 3 | a_k$$

$$\left[\frac{n}{3} \right] - \text{liczba liczb p.d. 3}$$

$$P(B) = \frac{\left[\frac{n}{3} \right] \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!}}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{\left[\frac{n}{3} \right]}{n}$$

2014/2015-III

Ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ losujemy kolejno bez zwracania k liczb, otrzymując ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Wiedząc, że $3 \leq k \leq n$, oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:

A: a_k jest największą liczbą wśród wylosowanych;

B: a_k jest podzielna przez 3;

C: $a_1 + a_2 + \dots + a_k > \frac{1}{2}k(k+1)$.

1...k

$$1+2+\dots+k$$

k!

$\Rightarrow$ C' - czyli nie {1...k}

$$P(C) = 1 - \frac{\frac{k!}{n!}}{(n-k)!} = 1 - \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

~~$\binom{k}{k}$~~

Zadanie 1. (0-1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy $a_1 = -1$. Wyraz a_2 jest równy:

- A. 1 B. -2 C. 0 D. 2

Zadanie 2. (0-1)

Wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x - 2018$ oraz $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ mają n punktów wspólnych. Zatem:

- A. $n = 1$ B. $n = 2$ C. $n = 0$ D. $n = 3$

Zadanie 3. (0-1)

Liczba miejsc zerowych funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$, gdy $x \neq 0, x \neq 1, x \neq 2$, jest równa

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Zadanie 4. (0-1)

Ile z podanych niżej równości jest prawdziwych dla dowolnego kąta α

- $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = \sin 2\alpha(1 + 2\cos \alpha)$,
- $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 2\sin \alpha(2\cos^2 \alpha + \cos \alpha)$,
- $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 4\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha$,
- $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 4\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \alpha$?

- A. dokładnie jedna B. dokładnie dwie C. dokładnie trzy D. 4

Zadanie 6. (0-2)

Oblicz liczbę przeciętną do ilorazu wartości największej przez wartość najmniejszą funkcji $f(x) = |x-2| - |3x+1|$ w przedziale $\langle -4, 4 \rangle$.

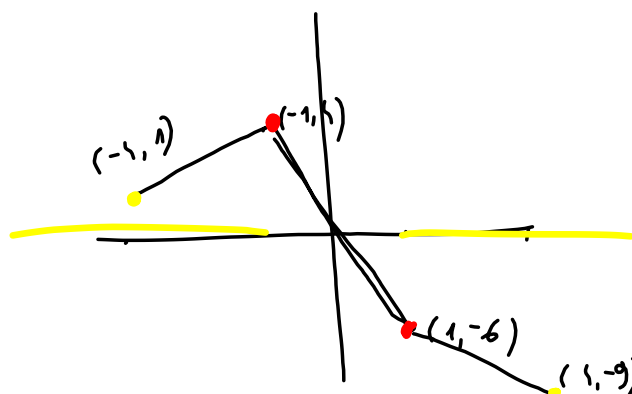
Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku

$$f(1) = -6$$

$$f(-1) =$$

$$f(-4) = 1$$

$$f(4) = -1$$

**Zadanie 7. (0-2)**

Wyznacz współrzędne punktu $D = (x, y)$ takiego, że $\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$ ($\vec{0}$ wektor zerowy), gdzie $A = (1, 1)$, $B = (-1, 2)$, $C = (0, -1)$.

$$A + \vec{AB} = B$$

$$\vec{AB} = B - A$$

$$f(x) \xrightarrow{(p,q)} + (x-p) + q$$

$$A - D + B - D + C - D = \vec{0}$$

$$3D = A + B + C$$

$$D = \frac{A+B+C}{3}$$

$$D = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

Zadanie 8. (0-3)

Niech $a = \log_{14} 2$. Wykaż, że $\log_{49} 16 = \frac{2a}{1-a}$.

$$p = \frac{2a}{1-a} = \frac{2 \log_{14} 2}{1 - \log_{14} 2} = \frac{2 \cdot \log_{14} 4}{2 \cdot \log_{14} 7} = \log_{14} 16$$

Zadanie 9. (0-5)

Jeśli liczbę dwucyfrową podzielimy przez iloczyn jej cyfr, to otrzymamy 3 i resztę 9.

Jeśli od kwadratu sumy cyfr tej liczby odejmiemy iloczyn jej cyfr, to otrzymamy daną liczbę.

Wyznacz tę liczbę.

$$\begin{aligned} 10d + j &= ? \\ d, j &\in \{0, \dots, 9\} \\ d &\neq 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} 10d + j = 3dj + 9 \\ (d+j)^2 - dj = 10d + j \end{cases}$$

$$(d+j)^2 - dj = 3dj + 9$$

$$(d-j)^2 = 9$$

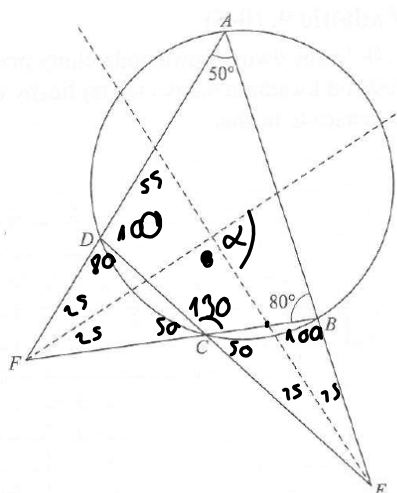
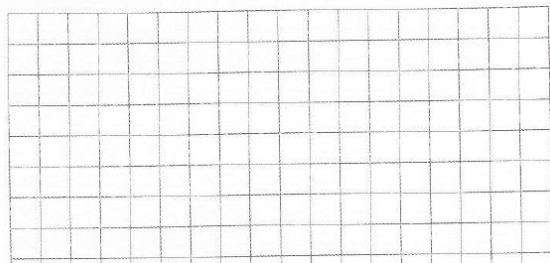
$$|d-j| = 3$$

$$\begin{cases} d = 3+j \\ j = 3+d \end{cases}$$

63

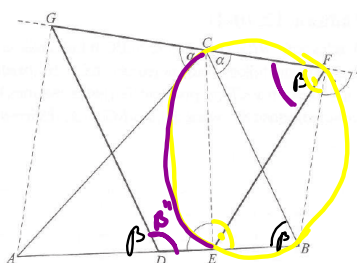
Zadanie 10. (0-3)

Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg. Kąt w wierzchołku A ma miarę 50° , a kąt w wierzchołku B ma miarę 80° . Proste AB i CD przecinają się w punkcie E . Proste AD i BC przecinają się w punkcie F (tak jak na rysunku). Oblicz miarę kąta między dwusiecznymi kątów AED i AFB .

**Zadanie 11. (0-4)**

Dany jest trójkąt ABC , którego boki spełniają warunek: $|AB| > |AC| > |BC|$. Przez wierzchołek C trójkąta ABC przeprowadzono prostą k , która tworzy z bokami BC i AC takie same kąty (patrz rysunek). Na prostych AB i k wybrano odpowiednio po dwa punkty D i E oraz F i G takie, że $|AD| = |BD|$, $CE \perp AB$, $BF \perp k$, $DG \parallel BC$.

Uzasadnij, że na czworokącie $DEFG$ można opisać okrąg oraz, że $AG \perp k$.



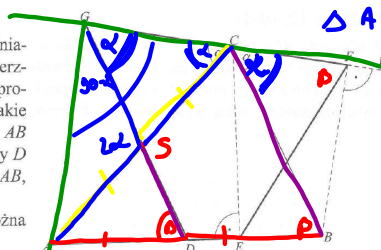
$$CBEF \text{ da się opisać na okrąg } \Leftrightarrow \angle CEB = 90^\circ = \angle CFB$$

$$\Rightarrow DEFG \text{ da się opisać na okrąg (1)}$$

Zadanie 11. (0-4)

Dany jest trójkąt ABC , którego boki spełniają warunek: $|AB| > |AC| > |BC|$. Przez wierzchołek C trójkąta ABC przeprowadzono prostą k , która tworzy z bokami BC i AC takie same kąty (patrz rysunek). Na prostych AB i k wybrano odpowiednio po dwa punkty D i E oraz F i G takie, że $|AD| = |BD|$, $CE \perp AB$, $BF \perp k$, $DG \parallel BC$.

Uzasadnij, że na czworokącie $DEFG$ można opisać okrąg oraz, że $AG \perp k$.



$$AD = DB$$

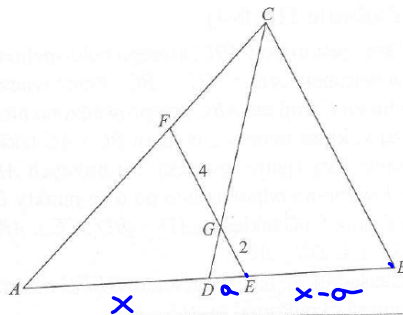
$$AS = CS = SG$$

$$S - \text{środek okręgu} \sim AFC \text{ i } AC \text{ jest średnicą} \Rightarrow$$



Zadanie 12. (0-4)

W trójkącie ABC odcinek $EF \parallel BC$ o końcach należących do boków odpowiednio AB i AC przecina środkową CD w punkcie G (patrz rysunek). Oblicz długość BC wiedząc, że $|EG| = 2$ i $|FG| = 4$.



$$\begin{aligned} \triangle AGF &\sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{x+a}{6} = \frac{2+4}{6} = 2 \\ \triangle DEG &\sim \triangle DBC \Rightarrow \frac{2}{2+4} = \frac{x}{x+a} \Rightarrow 6x = a+x \\ BC &= 10 \qquad x = 5a \end{aligned}$$

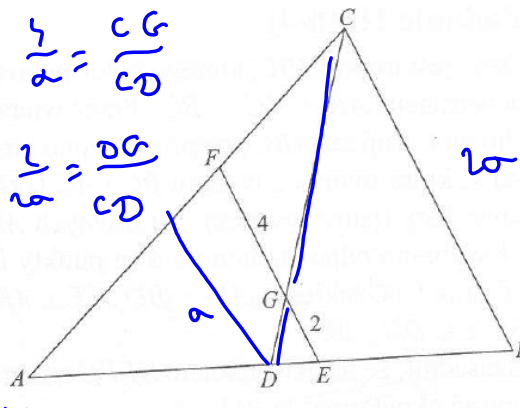
Zadanie 12. (0-4)

W trójkącie ABC odcinek $EF \parallel BC$ o końcach należących do boków odpowiednio AB i AC przecina środkową CD w punkcie G (patrz rysunek). Oblicz długość BC wiedząc, że $|EG| = 2$ i $|FG| = 4$.

$$1 = \frac{EG}{CD} + \frac{DG}{CD} = \frac{2}{a} + \frac{4}{a}$$

$$a = 5$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{a}{c}$$



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{a}$$

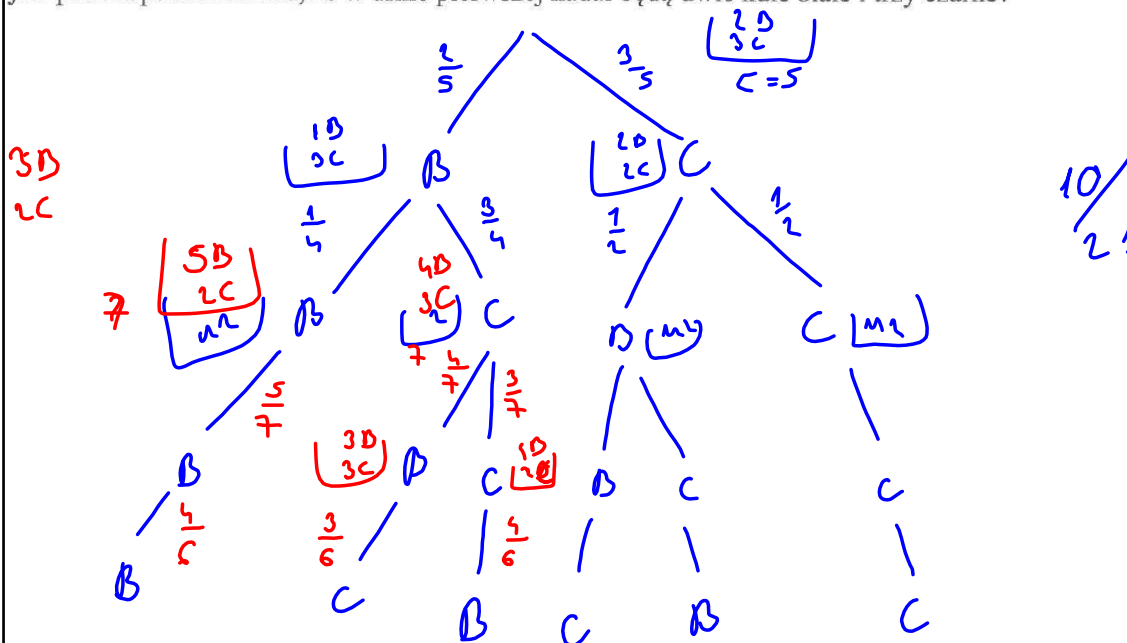
$$\frac{a}{a} + \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1-c}{c}$$

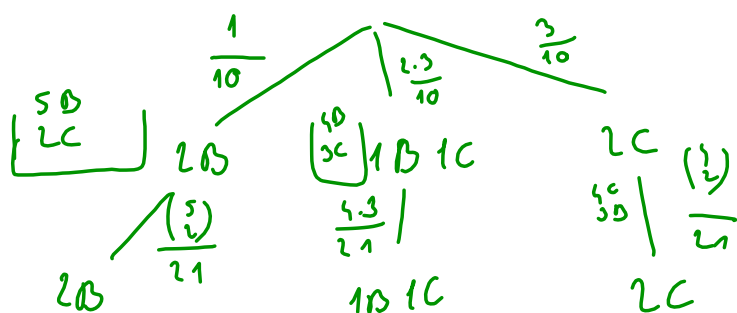
II

Zadanie 13. (0-5)

Dane są dwie urny z kulami. W urnie pierwszej są dwie kule białe i trzy czarne. W drugiej trzy białe i dwie czarne. Losujemy dwie kule z urny pierwszej i przekładamy je do urny drugiej. Następnie z urny drugiej losujemy dwie kule i przekładamy je do urny pierwszej. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że w urnie pierwszej nadal będą dwie kule białe i trzy czarne?

**Zadanie 13. (0-5)**

Dane są dwie urny z kulami. W urnie pierwszej są dwie kule białe i trzy czarne. W drugiej trzy białe i dwie czarne. Losujemy dwie kule z urny pierwszej i przekładamy je do urny drugiej. Następnie z urny drugiej losujemy dwie kule i przekładamy je do urny pierwszej. Oblicz, jakie jest prawdopodobieństwo, że w urnie pierwszej nadal będą dwie kule białe i trzy czarne?



$$\begin{bmatrix} 2B \\ 3C \end{bmatrix}$$

$$\bar{n} = \binom{5}{2} = 10$$

$$\bar{n}_i = \binom{7}{2} = 21$$

$$P(A) = \dots \dots \dots \frac{10}{21}$$

Zadanie 14. (0-5)

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoramienny ABC o ramionach długości $|AB| = |AC| = a$ i kącie między ramionami α . Krawędzie AD , BD , CD nachylone są do podstawy pod kątem β . Wykaż, że objętość tego ostrosłupa jest równa $\frac{1}{6} a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$.

Zadanie 15. (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których równanie $x^2 - 4x + a = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 oraz równanie $x^2 - 36x + b = 0$ ma dwa różne pierwiastki x_3, x_4 takie, że ciąg (x_1, x_2, x_3, x_4) jest ciągiem geometrycznym.

$$\textcircled{d)} \textcircled{f)}^{(3)} + 2g \text{ fghrr}$$

Zadanie 16. (0-7) $AB^2 = (x_0 - x_A)^2 + (x_0 - x_A)(x_A + x_B)^2 = (x_0 - x_A)^2 (1 + (x_A + x_B)^2)$

Wyznacz długość najkrótszego odcinka AB przechodzącego przez punkt $C = (0, 1)$, którego końce należą do paraboli $y = x^2$.

$$k: y = ax + 1$$

$$p: y = x^2$$

$$x^2 - ax - 1 = 0$$

$$\Delta_x > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$x_A, x_B$$

$$|x_B - x_A| = \left| -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} - -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \sqrt{a^2 + 4}$$

$$|x_B + x_A| = -\frac{b}{a'} = a$$

$$|AB|^2 = (a^2 + 4)(1 + a^2)$$

$$-4 \quad -1$$



$$a^2 > 0$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$a =$$

