

408. Udowodnij następujące twierdzenie Cevy: Jeżeli punkt P należy do wnętrza trójkąta ABC i proste AP , BP , CP przecinają boki $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ odpowiednio w punktach K , L , M , to $AM \cdot BK \cdot CL = MB \cdot KC \cdot LA$.

409. Wykaż, że jeżeli dwie środkowe trójkąta są równe, to trójkąt jest równoramienny.

410. Wykaż, że jeżeli prosta k jest rozłączna z trójkątem, to odległość środka ciężkości tego trójkąta od prostej k jest średnią arytmetyczną odległości jego wierzchołków od tej prostej.

Uzasadnij, że jeśli $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ to $ad = bc$.

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$$

$$b^2c^2 + a^2d^2 - 2adbc = 0$$

$$(ad - bc)^2 = 0$$

Zadanie 12.14. [matura, czerwiec 2015, zad. 4 swe. (3 pkt)]
Wykaż, że dla każdej dodatniej i różnej od jedności liczby a i dla każdej dodatniej i różnej od jedności liczby b spełniona jest równość

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \dots + \frac{1}{\log_{a^{55}} b} + \frac{1}{\log_{a^{56}} b} = \frac{55}{\log_a b}.$$

Zadanie 12.15. [matura, maj 2016, zad. 8. (2 pkt)]
Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.

Zadanie 12.16. [matura, czerwiec 2016, zad. 8. (4 pkt)]
Wykaż, że dla $a, b, c, d > 0$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$.

Zadanie 12.17. [matura, czerwiec 2016, zad. 5 swe. (3 pkt)]
Wykaż, że jeśli a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a + b + c = 0$, to $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$.

Zadanie 12.18. [matura, maj 2017, zad. 7. (3 pkt)]
Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2 y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$.

$a+d, b+c \geq 2\sqrt{ad+bc}$ $\cdot 2$
 $\frac{a+d+b+c}{2} \geq \sqrt{ad+bc}$ ok. bo $a \geq 2$ $b \geq 2$ $c \geq 2$ $d \geq 2$

$(a-b)^2 \geq 0$ $x=a^1$ $a=\sqrt{x}$
 $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ $y=b^1$ $b=\sqrt{y}$
 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ $x, y \geq 0$
 $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$ $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ $x+y \geq 2\sqrt{xy}$
 $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Zadanie 12.18. [matura, maj 2017, zad. 7. (3 pkt)]

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^2 y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4 > 0$.

$$2 \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(xy-2)^2}_{\geq 0} > 0 \quad (1p)$$

$x \neq y \implies (x-y)^2 > 0$

Zadanie 12.17. [matura, czerwiec 2016, zad. 5 swe. (3 pkt)]

Wykaż, że jeśli a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a + b + c = 0$, to $3(a^2 + b^2 + c^2) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$.

$$a + b = -c$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + c^2 + 2ac + 2bc = 0$$

$$(a + b)^2 + c(c + 2a + 2b) = 0$$

$$= (-c)^2 + c(c + 2 \cdot (-c)) = c^2 + c^2 - 2c^2 = 0$$

$$(a + b + c)^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2 +$$

Zadanie 12.14. [matura, czerwiec 2015, zad. 4 swe. (3 pkt)]

Wykaż, że dla każdej dodatniej i różnej od jedności liczby a i dla każdej dodatniej i różnej od jedności liczby b spełniona jest równość

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \dots + \frac{1}{\log_{a^9} b} + \frac{1}{\log_{a^{10}} b} = \frac{55}{\log_a b} = 55 \cdot \frac{1}{\log_a b}$$

$$\log_a a (1 + 2 + \dots + 10)$$

$$\frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 11 \cdot 5 = 55$$

Zadanie 12.15. [matura, maj 2016, zad. 8. (2 pkt)]

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.

$$Z: x, y \in \mathbb{R}_+ \quad x^2 + y^2 = 2$$

$$T: x + y \leq 2$$

$$D: \begin{array}{l} (x+y)^2 \geq 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 \geq 0 \\ 2xy + 2 \geq 0 \\ xy + 1 \geq 0 \\ xy \geq -1 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (x-y)^2 \geq 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ x^2 + y^2 \geq 2xy \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} (x+y)^2 - 2xy = 2 \\ (x+y)^2 = 2 + 2xy \geq 4 \\ |x+y|^2 \geq 4 \\ |x+y| \geq 2 \end{array}$$

Zadanie 12.15. [matura, maj 2016, zad. 8. (2 pkt)]

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.

$$Z: x, y \in \mathbb{R}_+ \quad x^2 + y^2 = 2$$

$$T: x + y \leq 2$$

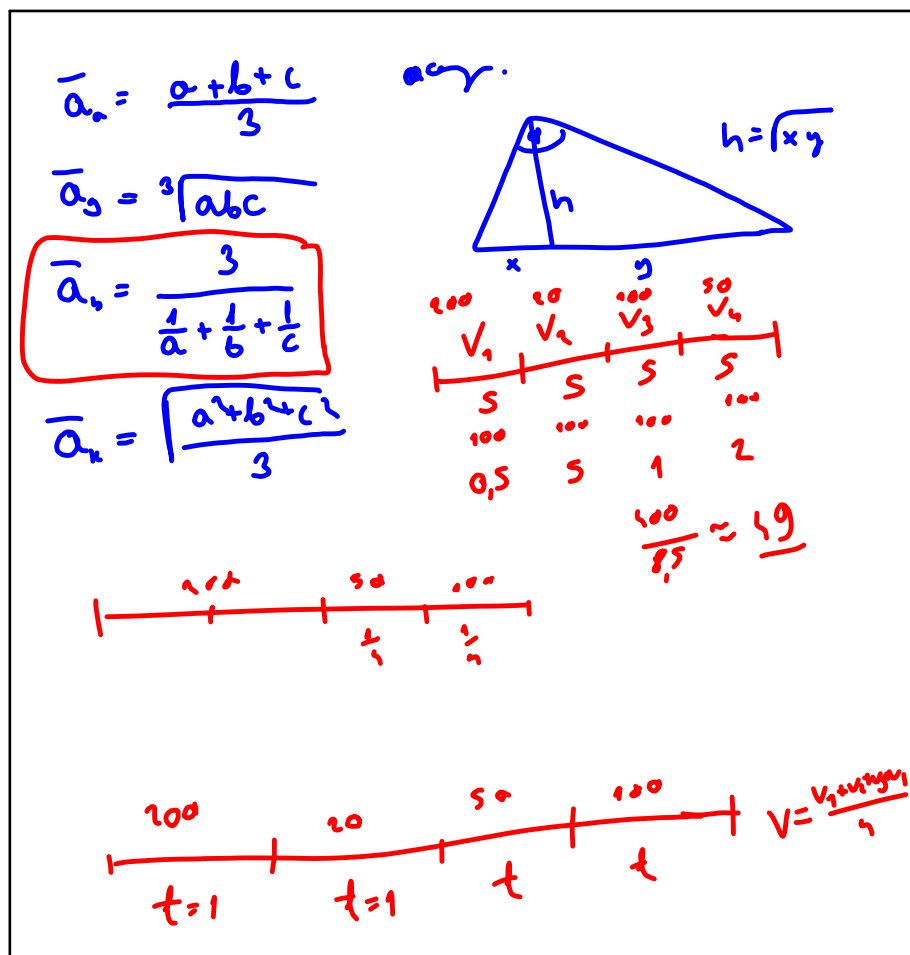
$$D: \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2 \\ (x+y)^2 - 2xy = 2 \\ (x+y)^2 = 2 + 2xy \leq 4 \\ \Rightarrow \begin{array}{l} x+y \leq 2 \\ xy \leq 1 \end{array} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x-y)^2 \geq 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ 2 - 2xy \geq 0 \quad |:2 \\ 1 \geq xy \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x+y \leq 2 \\ xy \leq 1 \end{array}$$

$$(x+y)^2 = 2 + 2xy \leq 2 + 2 = 4$$

$$|x+y| \leq 2$$

$$\frac{x+y}{2} \leq 1 \quad \wedge \quad x+y \leq 2$$



$$\bar{a}_n \geq \bar{a}_g \wedge \bar{a}_n = \bar{a}_g \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$$

$$\bar{a}_k \geq \bar{a}_n \geq \bar{a}_g \geq \bar{a}_h$$

3. Wykaż, że dla $a > 0, b > 0$ i $c > 0$ zachodzą poniższe związki:

a) $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

b) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

c) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

d) $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$

e) $a+b+c=1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

f) $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$

g) $a < b \Rightarrow \frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$

h) $abc=1 \Rightarrow (1+a)(1+b)(1+c) \geq 8$

i) $a+b=1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9$

j) $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

k) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$

l) $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$

c) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

Uwaga

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = \sqrt[3]{1} = 1 \quad | \cdot 3$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \quad c \sim d$$

$$a > b$$

$$c > d$$

$$e > f$$

$$ace > bdf$$

$$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}_+$$

24. Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n , liczba postaci: $n^3 - n^2 - n + 1$ jest podzielna przez 16.
25. Wykaż, że dla wszystkich całkowitych m liczba: $m^6 - 2m^4 + m^2$ dzieli się przez 36.
26. Wykaż, że suma dwóch kolejnych liczb naturalnych nieparzystych jest podzielna przez 4.
27. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ jest podzielne przez 3.

29. Udowodnij, że kwadrat każdej liczby naturalnej jest podzielny przez 9 lub z dzielenia przez 3 daje resztę 1.
30. Udowodnij, że kwadrat każdej liczby całkowitej zarówno w dzieleniu przez 3 jak i w dzieleniu przez 4 daje resztę 0 lub 1.
31. Udowodnij, że dla każdego n naturalnego jedna z liczb: $9^n - 1$, $9^n + 1$ jest:
 a) podzielna przez 8,
 b) podzielna przez 10.
32. Liczby całkowite x, y, z przy dzieleniu przez 4 dają odpowiednio reszty 1, 2, 3. Oblicz resztę z dzielenia liczby $x^2 + y^2 + z^2$ przez 4.
33. Wykaż, że suma kwadratów trzech liczb całkowitych niepodzielnych przez 3 dzieli się przez 3.
34. Wykaż, że suma dwóch kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3 jest podzielna przez 3.
35. Suma kwadratów dwóch liczb całkowitych a i b jest kwadratem liczby całkowitej. Wykaż, że przynajmniej jedna z tych liczb jest liczbą parzystą.
36. Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych podzielona przez 3 daje resztę 2.
37. W liczbie czterocyfrowej cyfra tysięcy jest taka sama jak cyfra dziesiątek, a cyfra setek jest taka sama jak cyfra jedności. Wykaż, że liczba ta dzieli się przez 101.
38. Czy istnieje taka liczba, która przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1, zaś przy dzieleniu przez 8 daje resztę 2? Odpowiedź uzasadnij.
39. Liczba $abcabc$ jest podzielna przez 10985. Jaka to liczba?

33. Wykaż, że suma kwadratów trzech liczb całkowitych niepodzielnych przez 3 dzieli się przez 3.

Trzy różne liczby całkowite tworzą ciąg geometryczny o ilorazie będącym ujemną liczbą całkowitą. Jeżeli najmniejszą z tych liczb zwiększymy o 16, to liczby te (w tej samej kolejności) są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

$$a_n \in \mathbb{Z}$$

$$a_1, a_1q, a_1q^2 \quad q < 0$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad + \quad - \quad + \Rightarrow a_1, a_1q+16, a_1q^2 - \text{m.k.} \\ \text{II} \quad - \quad + \quad - \Rightarrow a_1, a_1q, a_1q^2+16 \end{array}$$

$$\text{I} \quad 2(a_1q+16) = a_1(1+q^2) \quad a_1, q \in \mathbb{Z}$$

$$2a_1q + 32 - a_1 - a_1q^2 = 0$$

$$(q-1)^2 a_1 = 32 = 2^5 = 4^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 8 = 1 \cdot 32$$

$$\begin{array}{l} \underbrace{(q-1)^2}_{\substack{4^2 \\ 2^2 \\ 1^2}} \cdot \underbrace{a_1}_{\substack{2 \\ 8 \\ 32}} = 32 \\ q-1 = -4 \\ \boxed{q = -3} \end{array} \quad \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 8 \\ q = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1, a_1 q, a_1 q^2 + 16$$

$$2a_1 q = a_1 + a_1 q^2 + 16$$

$$-16 = a_1(q-1)^2$$

$$-1 \quad 4^2 q = -3$$

$$-4 \quad 2^2 q = -1$$

$$\cancel{-16} \quad 1^2 q = 0$$

$$x^2 + 8x + \underbrace{3m+9+2m^2} = 0$$

$$\boxed{x_1 + 5 = 2x_2}$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1 + 5 = 2x_2 \end{cases}$$

$\Downarrow$
 $x_1 - 2x_2 = -5$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -8 \\ x_1 + 5 = 2x_2 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\parallel \quad x_1 x_2 = \frac{5}{2}$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta > 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$$

$$ab + 5a^2 - 8b^2 = 0 \quad | : b^2 \neq 0 \quad \underline{I}$$

$$\frac{a}{b} + 5\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8 = 0$$

$$\underline{II} \quad b = 0$$

$$(\quad) (\quad) (\quad) = \underline{\underline{21 \dots}}$$

$$(\quad) (\quad) (\quad) = \text{scribble} \quad \text{scribble}$$

Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, których zapis dziesiętny składa się tylko z dwóch różnych cyfr?

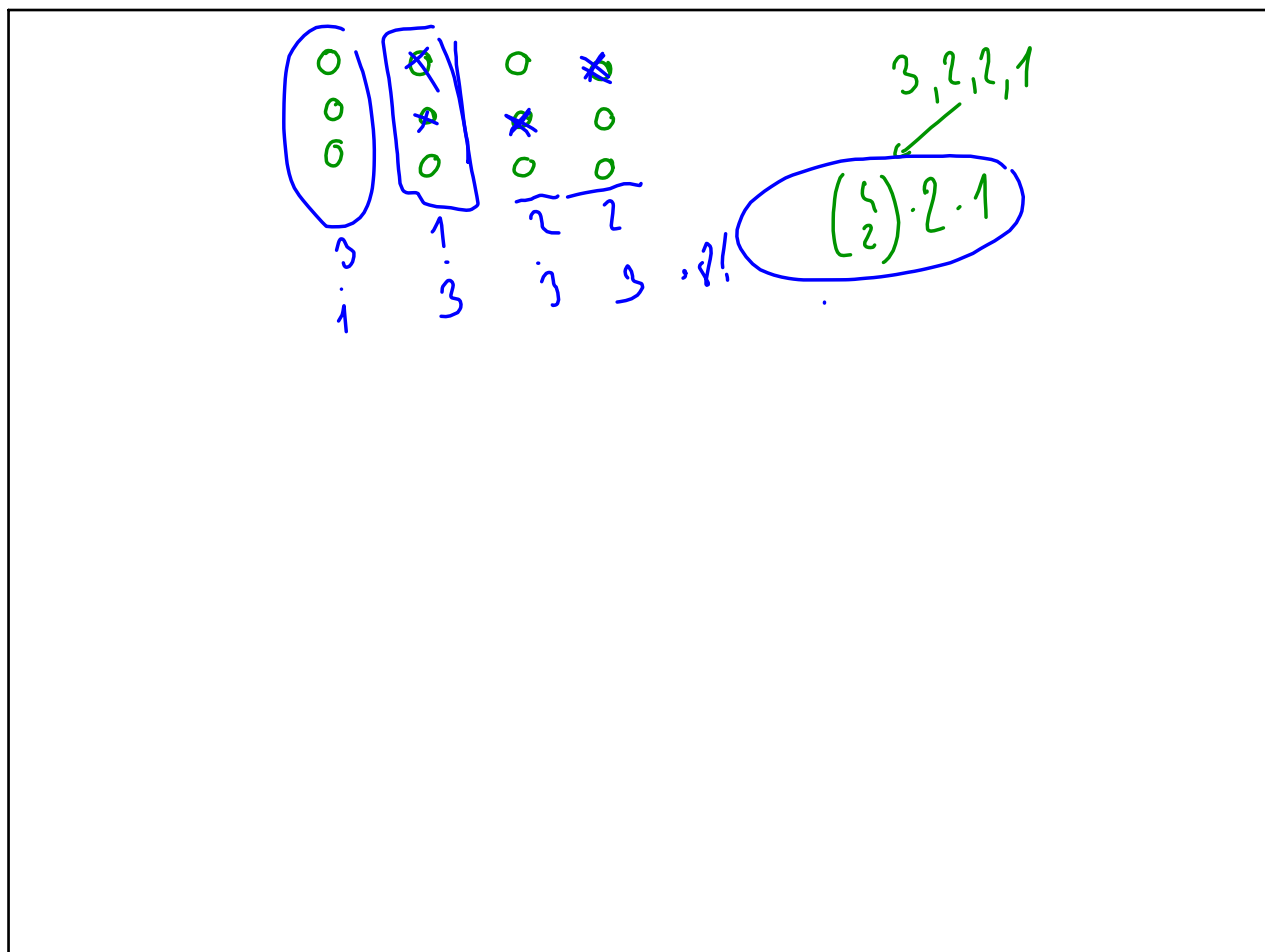
$$\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{array}{c} 9 \\ a \end{array}} & \begin{array}{c} 9 \\ b \end{array} & \begin{array}{c} 9 \\ a \end{array} & \begin{array}{c} 9 \\ b \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 9 \\ b \end{array} & \begin{array}{c} 9 \\ a \end{array} & \begin{array}{c} 9 \\ b \end{array} & \begin{array}{c} 9 \\ b \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 9 \\ a \end{array} & \begin{array}{c} 9 \\ b \end{array} & \begin{array}{c} 9 \\ b \end{array} & \begin{array}{c} 9 \\ b \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} abbb \times 4 \\ aabb \times \binom{4}{2} : 2^+ \end{array} \right\} \cdot 9 \cdot 9$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} \Delta \\ \Delta \\ \Delta \end{array}$$

$$\begin{array}{c} abaa \\ abaa \\ \hline \rightarrow \text{scribble} \end{array}$$



40. Za pomocą trzech różnych cyfr zapisano wszystkie liczby trzycyfrowe. Suma tych liczb wynosi 5328. Jakie to były cyfry?
41. Udowodnij, że iloczyn cyfr liczby trzycyfrowej jest zawsze mniejszy od tej liczby.
42. Wykaż, że gdy n jest liczbą naturalną, to liczba $n^2 + 3n + 5$ nie dzieli się przez 121.
43. Znajdź liczbę dwucyfrową równą sumie sześcianu liczby dziesiątek i kwadratu liczby jedności.
44. Jeżeli w liczbie dwucyfrowej przestawimy cyfry, to różnica tych liczb równa się $\frac{3}{4}$ mniejszej z tych liczb. Jaka to liczba? Podaj wszystkie rozwiązania.
45. Liczby od 1 do 1000 pomnożono kolejno każdą przez każdą. Wykaż, że wśród tych iloczynów więcej jest liczb parzystych niż nieparzystych.
46. Jaką cyfrą może kończyć się liczba naturalna n , gdy wiadomo, że liczba $n^4 + n^3 + n^2 + n$ nie dzieli się przez 10?
47. Znajdź wszystkie liczby całkowite k , dla których wyrażenia: $\frac{k+5}{k+3}, \frac{k^2+1}{k+1}, \frac{k^3-k^2+2}{k-1}$, $\frac{k^2+7k+14}{k+3}, \frac{2k+6-p}{k+3}$, p – liczba pierwsza, są liczbami całkowitymi.
48. Znajdź wszystkie liczby naturalne n dla których liczba $n^3 + 3$ jest podzielna przez $n+3$.
49. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna postaci: $25^k - 11^l$, gdzie $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l \neq 0$?
50. Dla jakich liczb pierwszych p liczby $2p+1$ i $4p+1$ też są pierwsze?
51. Udowodnij, że suma dwóch liczb pierwszych różniących się o 2, przy czym mniejsza z nich jest większa od 3, jest podzielna przez 12.
52. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $k > 3$, liczba postaci: $k^3 + 3k^2 - 4k - 12$ jest iloczynem co najmniej czterech liczb pierwszych.
53. Czy wśród liczb: 21, 2211, 222111, 22221111,itd. znajduje się liczba pierwsza?