

744. Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:
 $\Delta = b^2 - 4ac$, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Twierdzenie. Funkcja $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$, jest

- rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$ i $\Delta \leq 0$;
- malejąca wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$ i $\Delta \leq 0$;
- rosnąca w przedziale $(-\infty, x_1)$ i malejąca w przedziale (x_1, ∞) wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$ i $\Delta > 0$;
- malejąca w przedziale $(-\infty, x_2)$ i rosnąca w przedziale (x_2, ∞) wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$ i $\Delta > 0$.

Korzystając z podanego twierdzenia, wykonaj poniższe polecenia.

a) Sprawdź, czy funkcja $f(x) = 3x^2 - 2x^2 + 5x + 6$ jest rosnąca.

b) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^2 - 6x^2 + 9x + 1$.

c) Wyznacz te wartości współczynników c i d , dla których funkcja $f(x) = -2x^2 + 3x^2 + cx + d$ jest malejąca.

$x_1 = 1$ $x_2 = 3$

$x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f \uparrow$
 $x \in (1, 3) \Rightarrow f \downarrow$
 $x \in (3, +\infty) \Rightarrow f \uparrow$

$\max U_k$

$x \in (-\infty, 1) \Rightarrow f \uparrow$
 $x \in (1, 3) \Rightarrow f \downarrow$
 $x \in (3, +\infty) \Rightarrow f \uparrow$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
 $x_1 < 3 \Rightarrow f(x_1) > f(3)$
 $(-1, 3) \uparrow \downarrow$
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 $3 < x_2 \Rightarrow f(3) < f(x_2)$
 $(3, +\infty) \uparrow \downarrow$

$a > 0$

$x \in (-\infty, 3) \Rightarrow f \downarrow$
 $x \in (3, +\infty) \Rightarrow f \uparrow$

$0 \text{ p } \sim -$ $(-\infty, -10) \uparrow \downarrow$

$\frac{U(x)}{G(x)} = 0$ $\mathbb{D}: x \in \mathbb{R} \setminus \{x; G(x) = 0\}$

Rozwiązywanie równań wymiernych:

1. Przenosimy wszystkie wyrażenia wymierne na lewą stronę i mianowniki zapisujemy w postaciach iloczynowych.
2. Ustalamy dziedzinę równania na podstawie postaci iloczynowych.
3. Skracamy ułamki i po skróceniu ustalamy wspólny mianownik.
4. Lewą stronę zapisujemy w postaci jednego ułamka, najlepiej licznik i mianownik w postaciach iloczynowych.
5. Ułamek jest równy 0 $\Leftrightarrow$ licznik = 0 i mianownik w dziedzinie.

$\frac{5}{0} = \frac{0}{0}$

6.47. Rozwiąż równania:

a) $\frac{x}{x+3} + \frac{1}{x+2} = \frac{x+6}{x^2+5x+6}$ b) $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x+2} = \frac{2x-2}{x^2+x-2}$

c) $\frac{x^2+8x-2}{x^2+2x-8} + \frac{x}{x+4} = \frac{x+1}{x-2}$ d) $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{x^2+x+12}{x^2-2x-3}$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -4\}$

$\frac{x^2+8x-2}{(x-2)(x+4)} + \frac{x(x-2)}{(x+4)(x-2)} - \frac{(x+1)(x+1)}{(x-2)(x+4)} = 0$

$x^2+8x-2 + x^2-2x - (x^2+2x+1) = 0$

$x^2+x-6 = 0$ $(x+3)(x-2) = 0$

$x_1 = 2 \notin \mathbb{D}$ $x_2 = -3 \in \mathbb{D}$

$\text{odp } x \in \{-3\}$

d) $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{x^2+x+12}{x^2-2x-3}$

$\frac{(x+1)^2}{(x-3)(x+1)} + \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+1)} - \frac{x^2+x+12}{(x-3)(x+1)} = 0$

$\mathbb{D}: x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -1\}$

$\frac{x^2+2x+1 + x^2-5x+6 - x^2-x-12}{(x-3)(x+1)} = 0$

$x^2-4x-5 = 0$ $\Delta = 16 + 20 = 36$

$(x-5)(x+1) = 0$

6.48. Rozwiąż równania:

a) $\frac{1}{|x|} = 4$ b) $\frac{1}{|x|} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{2x-3} = 1$ d) $\frac{2}{1-3x} = 3$ e) $\frac{2}{|x|-1} = 1$ f) $\frac{3}{|x|+2} = 1$ g) $\frac{3}{|x-1|-1} = 2$ h) $\frac{1}{2|x-3|+1} = 5$

6.49. Wyznacz wartość a , wiedząc, że liczba $-3\frac{1}{2}$ jest rozwiązaniem równania $\frac{x-1}{x+a} = 3$.

6.50. Dane jest równanie z niewiadomą x : $\frac{x-a}{x+1} = \frac{x+a}{x-2}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

- Podaj dziedzinę równania.
- Rozwiąż równanie dla $a = -2$.
- Wyznacz wartość a , dla której rozwiązaniem danego równania jest liczba $\frac{1}{5}$.

6.51. Dane jest równanie z niewiadomą x : $\frac{x-a}{x} = \frac{x-a}{x+1}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

- Podaj dziedzinę równania.
- Rozwiąż równanie dla $a = 0,75$.
- Wyznacz wartość a , dla której rozwiązaniem danego równania jest liczba $\frac{1}{5}$.

6.52. Dane jest równanie z niewiadomą x : $\frac{x+3a}{xa-x} = 2$, gdzie $a \neq 1$.

- Rozwiąż równanie dla $a = 2$.
- Wyznacz x z równania, jeśli wiadomo, że $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}\}$.