

6.106. Wykonaj dzielenie: $\frac{2x^2 + 3x - 2}{2x^3 + x^2 + 6x + 3} : \frac{4x^2 - 1}{4x^2 + 4x + 1}$; wynik przedstaw w postaci nieskracalnego ułamka algebraicznego. Podaj konieczne założenia.

$\Delta_{25} = 25$
 $x_1 = \frac{1}{2}$
 $x_2 = -2$

$\begin{array}{l} \text{M}_1 \\ x^2(2x+1) + 3(2x+1) \end{array} \bigg| \begin{array}{l} \text{M}_2 \\ (2x-1)(2x+1) \end{array} \bigg| \begin{array}{l} \text{M}_3 \\ (2x+1)^2 \end{array}$

$(x^2+3)(2x+1)$

$\mathbb{D}: x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

$\frac{2(x+2)(x-\frac{1}{2})}{(x^2+3)(2x+1)} \cdot \frac{(2x+1)^2}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{x+2}{x^2+3}$

7. Ciagi

Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów

7.1. Podaj ogólny wyraz a_n następujących ciągów:

$(4, 8, 3, \pi)$
 $a_1 = 4, a_2 = 8, a_3 = 3, a_4 = \pi \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 \quad \mathbb{D}: x \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 \quad \mathbb{D}: x \in \mathbb{N}_+$
 $f(1) = 1$
 $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
 $(1, 4, 9, \dots)$
 $(1, 2, 3, 4, \dots)$

$f(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{N}_+$
 $f(m) = m^2$
 f_n
 $a_m = m^2 \quad m \in \mathbb{N}_+$

$a_1 = 1 \cdot (-1)^{1+1} = 1, a_2 = 2 \cdot (-1)^{2+1} = -2$

7.1. Podaj ogólny wyraz a_n następujących ciągów:

a) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$ $a_n = n(-1)^{n+1}$
 b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots$
 c) $6, -6, 6, -6, 6, -6, \dots$
 d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \dots$ $a_n = \frac{n}{n^2+1}$
 e) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{36}, \frac{1}{64}, \frac{1}{100}, \dots$
 f) $1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \frac{1}{81}, \dots$ $a_n = \frac{1}{n^2}$

7.2. Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (a_n) . Napisz cztery początkowe wyrazy tego ciągu. Następnie oblicz a_{2k} , a_{3k} , a_{2k-1} oraz a_{5k+3} , gdzie $k \in \mathbb{N}_+$.

a) $a_n = \frac{1}{2}(n-4), n \in \mathbb{N}_+$
 b) $a_n = 3 - n^2, n \in \mathbb{N}_+$
 c) $a_n = 2n^2 - 4n + 1, n \in \mathbb{N}_+$
 d) $a_n = \sqrt{n-1}, n \in \mathbb{N}_+$ $a_5 = \sqrt{5-1} = 2$
 e) $a_n = 5^{n-1}, n \in \mathbb{N}_+$
 f) $a_n = \frac{n+5}{2n+1}, n \in \mathbb{N}_+$

7.3. Naskicuj wykres ciągu (a_n) , jeśli dany jest wyraz ogólny tego ciągu:

a) $a_n = -3, n \in \mathbb{N}_+$
 b) $a_n = -n + 7, n \in \mathbb{N}_+$
 c) $a_n = \frac{1}{3}n - 1, n \in \mathbb{N}_+$
 d) $a_n = n^2 - 5n, n \in \mathbb{N}_+$
 e) $a_n = -\frac{4}{n}, n \in \mathbb{N}_+$
 f) $a_n = \frac{-n}{n+2}, n \in \mathbb{N}_+$

$a_n = \frac{n+5}{2n+1}, n \in \mathbb{N}_+$
 $n = 2k-1$
 $a_{2k-1} = \frac{2k-1+5}{2(2k-1)+1} = \frac{2k+4}{4k-1}$

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}$
 $\mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{Q}$
 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$
 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$

7.4. Które z wyrazów ciągu (a_n) są równe zero, jeśli:

a) $a_n = (n^2 - 2)(n^2 - 4)(n - 3)$
 b) $a_n = \frac{n^2 - 4n - 21}{n^2 + 1}$
 c) $a_n = \frac{n^4 - 256}{n^2 - n + 2}$
 d) $a_n = \frac{n^3 - 7n^2 + 11n - 5}{3n + 2}$

$a_n = 0 \Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 11n - 5 = 0 \wedge 3n + 2 \neq 0$

$$(a_n) - \text{cg } a_n$$

$$a_n - \text{mitylne cięgi}$$

$$a_m = (\underline{m}+1)^2 - 3 \leftarrow a_3 = (\overset{\text{trzy}}{3}+1)^2 - 3 = 13$$

$$a_{k-1} = \left(\frac{k^2-4+k}{k-3} \right)^2 - 3 \quad a_q = (\underline{q}+1)^2 - 3$$