

7.6. Które wyrazy ciągu (a_n) są ujemne, jeśli:

- a) $a_n = n^2 - 10, n \in \mathbb{N}_+$ b) $a_n = -n^2 + 10n + 11, n \in \mathbb{N}_+$
 c) $a_n = \frac{n-6}{n+3}, n \in \mathbb{N}_+$ d) $a_n = \frac{9-n}{7-3n}, n \in \mathbb{N}_+?$

$$a_m = \frac{2-m}{7-3m} \quad m \neq \frac{7}{3} \wedge m \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow$$

$$a_m < 0 \Leftrightarrow \frac{2-m}{7-3m} < 0 \quad (m \in \mathbb{N}_+)$$

$$(7-3m)^2 > 0 \quad \text{GOG}$$

$$\frac{2-m}{7-3m} < 0 \quad \Leftrightarrow \frac{2-m}{7-3m} < 0 \quad \text{GOG}$$

mimo ujemnego

$$(9-m)(7-3m) < 0$$

$$m \cdot \text{kw.} \cdot \text{u.} \cdot \text{kw.}$$

$$m = 9 \vee \frac{7}{3} = m$$

$$m \in \mathbb{N}_+$$

$$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{odp. } m \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$c) a_n = \frac{10-n}{3n-16}, n \in \mathbb{N}_+$$

$$m \neq 5\frac{1}{3} \quad \text{D: } m \in \mathbb{N}_+$$

$$a_m > 0 \Leftrightarrow \frac{10-m}{3m-16} > 0 \quad | \cdot (3m-16)^2 > 0$$

$$(10-m)(3m-16) > 0$$

$$\checkmark -3m^2 < 0 \wedge$$

$$-(m-10)(3m-16) > 0$$

$$-3(m-10)(m-5\frac{1}{3}) > 0$$

$$\wedge$$

7.8. Zbadaj, które wyrazy nieskończonego ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, jeśli:

a) $a_n = \frac{1}{2}n - 5$

c) $a_n = \frac{6-n}{n}$

$$\frac{6-n}{n} - 1$$

$$b) a_n = \frac{12}{n+1}$$

$$d) a_n = \frac{n+13}{n+3} = \frac{1(m+3)+10}{m+3} = \frac{m+8}{m+3} + \frac{10}{m+3}$$

$$a_m = 1 + \frac{10}{m+3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

m być całkowite

$$m+3 \mid 10 \Leftrightarrow m+3 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$$

$$m \in \{-4, -1, 2, 7, -13, -8, -5, -1\}$$

$$\hat{m} \in \mathbb{N}_+$$

$$m \in \{2, 7\}$$

7.11. Zbadaj, czy wśród wyrazów ciągu (a_n) , gdzie $a_n = \frac{4n}{2n+1}, n \in \mathbb{N}_+$, są liczby naturalne.

$$\mathbb{N} \ni a_n = \frac{4n}{2n+1} = \frac{2(2n+1) - 2}{2n+1} = \frac{2(2n+1)}{2n+1} - \frac{2}{2n+1} =$$

$$a_n = 2 - \frac{2}{2n+1}$$

$$\frac{2}{2n+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2n+1 \mid 2 \Leftrightarrow$$

$$2n+1 \in \{-2, -1, 1, 2\} \Leftrightarrow$$

$$2n \in \{-3, -2, 0, 1\} \mid :2$$

$$n \in \{-\frac{3}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}\} \cap \mathbb{N}_+$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\hat{m} \in \emptyset$$

7.12. Wyznacz cztery pierwsze wyrazy ciągu (a_n) , wiedząc, że dla $n \in \mathbb{N}_+$ spełnia on dwa warunki:

$$a_n + a_{n+1} = \frac{2n+1}{n^2+n} \quad \text{i} \quad a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^2+n}$$

$$a_m = \frac{1}{m}$$

$$m \in \mathbb{N}_+$$

$$a_n + a_{n+1} = \frac{2n+1}{n^2+n}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^2+n}$$

$$2a_n = \frac{2n+1}{n^2+n} + \frac{1}{n^2+n} =$$

$$2a_n = \frac{2}{n} \mid :2 \mid \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{4}$$

7.13. Wyznacz trzeci, czwarty i piąty wyraz ciągu określonego wzorem rekurencyjnym:

a) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n - 2n$

c) $a_1 = 5, a_{n+1} = \sqrt{a_n}$

f) $a_1 = -3, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$

b) $a_1 = \frac{1}{4}, a_{n+1} = (a_n)^2 \cdot 4^n$

d) $a_1 = 2, a_{n+1} = 0,25(4a_n - 1)$

f) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$

$$a_5 = ?$$

$$a_1 = -3$$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2}$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{a_3} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5}$$

$$a_5 = 1 + \frac{1}{a_4} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{5}} = \frac{12}{7}$$

1.3. Wymień trzy cechy ciągów i pokaż, że ciąg określonego rodzaju jest ciągiem arytmetycznym.

a) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n - 2n$ b) $a_1 = \frac{1}{4}, a_{n+1} = (a_n)^2 \cdot 4^n$
 c) $a_1 = 5, a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ d) $a_1 = 2, a_{n+1} = 0.25(4a_n - 1)$
 e) $a_1 = -3, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ f) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$

$a_8 = 2^7 \cdot 1 = 128$
 $a_{100} = 2^{99} \cdot 1$
 $a_m = 2^{m-1} \cdot 1$

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$
 $a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 1 = 4$
 $a_4 = 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 2^2 \cdot 1 = 2^3 \cdot 1 = 8$

$a_1 = 5, a_{n+1} = \sqrt{a_n}$
 $a_2 = \sqrt{a_1} = \sqrt{5}$ $a_3 = \sqrt{a_2} = \sqrt{\sqrt{5}} = (5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{4}}$
 $a_4 = \sqrt{a_3} = (5^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{8}}$
 $a_{100} = 5$ $a_n = 5^{\frac{1}{2^{n-1}}} \quad n \in \mathbb{N}_+$

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow$

$m < m+1 \Rightarrow a_m < a_{m+1}$

$(a_n) \nearrow \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0$

$(a_n) \searrow \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n < 0$

Zbadać monotoniczność ciągu tzn określić znak różnicy: $a_{n+1} - a_n$