

7.78. Trzy liczby, których suma wynosi 9, tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy $\frac{1}{3}$, a dwóch pozostałych nie zmienimy, to otrzymamy ciąg geometryczny. Znajdź te liczby.

1) $a+b+c=9$
 2) a, b, c - c. aryt. $\Leftrightarrow 2b=a+c$
 $3b=9 \Rightarrow b=3$
 3) $a+3, 3, c$ - c. geom.
 $a, 3, c$ - c. aryt. $\Rightarrow a+c=6$
 $c=6-a$
 $9=(a+3)c$
 $9=(a+3)(6-a)$
 $a^2 - \frac{19}{3}a - \frac{18}{3} = 0$
 $a_1 = -2$
 $a_2 = \frac{39}{3}$
 odp.
 $(-2, 3, 8) \vee (\frac{39}{3}, 3, \frac{9}{3})$

7.83. Trzy różne liczby a, b, c tworzą ciąg arytmetyczny, natomiast liczby a, d, c - ciąg geometryczny. Wyrazy obu ciągów są dodatnie. Suma wyrazów którego ciągu jest większa?

a, b, c - c. aryt. a, d, c - c. geom.
 a, b, c - c. aryt. $\Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$
 a, d, c - c. geom. $\Rightarrow d = \sqrt{ac}$
 $a+b+c > a+d+c$
 $a, b \in (0, +\infty)$
 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$
 $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a=b$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ŚRĘDNE.

$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \bar{a}_n$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$

$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \bar{a}_g$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\bar{a}_h = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$

$\bar{a}_n \geq \bar{a}_g \geq \bar{a}_h$

100

$s_1 = 50 \text{ km}$ $s_2 = 50 \text{ km}$
 $v_1 = 150 \text{ km/h}$ $v_2 = 50 \text{ km/h}$

$\bar{v} = \frac{150 + 50}{2}$ (crossed out)

$\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{150} + \frac{1}{50}} = \frac{2}{\frac{4}{150}} = 75 \text{ km/h}$
 $\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$
 $\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{150} + \frac{1}{50}} = 75 \text{ km/h}$
 $\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$
 $\bar{v} = \frac{2}{\frac{1}{150} + \frac{1}{50}} = 75 \text{ km/h}$

$v_1 = 150 \text{ km}$ $v_2 = 50 \text{ km}$

$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Leftrightarrow t_1 = t_2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
 $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)$
 $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n) = a^n - b^n$
 $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)$
 $1 - q^n = (1-q)(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})$
 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} = a_1(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})$
 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $q \neq 1$
 $S_n = m \cdot a_1$ $q = 1$
 zad 7.89