

2.64. Punkty $A(2, 3)$ i $B(4, -1)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

$P(A\bar{B}): y = -x + 7$
 $D(x_1, y_1)$
 $2x_1 + y_1 - 7 = 0$
 $A(D, \bar{B}) = |2x_1 - 3 + 4x_1 + 1 - 7| = |6x_1 - 5|$
 $|6x_1 - 5| = 10 \quad | : 6$
 $|x_1 - \frac{5}{6}| = \frac{5}{3}$
 $|x_1 - \frac{5}{6}| = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x_1 - \frac{5}{6} = \frac{5}{3} \vee x_1 - \frac{5}{6} = -\frac{5}{3}$
 $x_1 = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \vee x_1 = -\frac{5}{6}$
 $y_1 = -x_1 + 7$
 $y_1 = -\frac{5}{2} + 7 = \frac{9}{2} \vee y_1 = \frac{37}{6}$
 $D_1(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}) \vee D_2(-\frac{5}{6}, \frac{37}{6})$

$\vec{AB} = \vec{DC} = (2, 4)$
 $\vec{AD} = \vec{BC} = (2, -4)$
 $C = D + \vec{AB}$
 $C_1 = (\frac{5}{2} + 2, \frac{9}{2} + 4) = (\frac{9}{2}, \frac{17}{2})$
 $C_2 = (-\frac{5}{6} + 2, \frac{37}{6} + 4) = (\frac{7}{6}, \frac{61}{6})$

2.64. Punkty $A(2, 3)$ i $B(4, -1)$ są dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego kwadratu.

$\vec{AB} = (2, -4)$
 $\vec{AD} = (1, 5)$
 $\vec{AD} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{AD} = (1, 5)$
 $\vec{AD} = \vec{BC}$
 $C = B + \vec{AD} = (4, -1) + (1, 5) = (5, 4)$
 $\vec{DC} = \vec{AB} = (2, -4)$
 $C = D + \vec{AB} \Rightarrow D = C - \vec{AB} = (5, 4) - (2, -4) = (3, 8)$
 $\vec{AD} = (1, 5) = (x_D - x_A, y_D - y_A)$
 $x_D - 2 = 1 \Rightarrow x_D = 3$
 $y_D - 3 = 5 \Rightarrow y_D = 8$
 $D(3, 8)$
 $C = D + \vec{AB} = (3, 8) + (2, -4) = (5, 4)$

2.68. Dane są punkty $A(-6, 8)$ i $B(2, 4)$ oraz prosta $k: y = x$. Wyznacz na prostej k punkt C , dla którego pole trójkąta ABC jest równe 16.

$P_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 8-4 & -6-2 \\ x+6 & y-8 \end{vmatrix} \right| = 16$
 $\frac{1}{2} |8x - 6y + 4x + 16| = 16$
 $|12x - 6y + 16| = 32$
 $|12x - 6y| = 16$
 $12x - 6y = 16 \vee 12x - 6y = -16$
 $2x - y = \frac{8}{3} \vee 2x - y = -\frac{8}{3}$
 $y = x$
 $2x - x = \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$
 $2x - x = -\frac{8}{3} \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$
 $C(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$
 $C(-\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$

2.67. Punkty $A(1, 7)$, $B(-5, 1)$, $C(7, -3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Oblicz odległość między środkiem ciężkości S trójkąta a środkiem ciężkości tego trójkąta.

$\vec{AB} = (-6, -6)$
 $\vec{AC} = (6, -10)$
 $\vec{BC} = (12, -4)$
 $k: -6x - 6y + 42 = 0$
 $k: -x - y + 7 = 0$
 $l: 6x - 6y - 10 = 0$
 $l: 3x - 3y - 5 = 0$
 $l: x - y - \frac{5}{3} = 0$
 $S = (\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}) = (\frac{1-5+7}{3}, \frac{7+1-3}{3}) = (\frac{3}{3}, \frac{5}{3}) = (1, \frac{5}{3})$
 $S_c = (\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}) = (1, \frac{5}{3})$
 $|SO| = \sqrt{(x_S - x_O)^2 + (y_S - y_O)^2} = \sqrt{1^2 + (\frac{5}{3})^2} = \sqrt{1 + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{34}{9}} = \frac{\sqrt{34}}{3}$

$K: Ax + By + C = 0$
 $K \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{AB} = (A, B)$
 $K \parallel \vec{AC} \Rightarrow \vec{AC} = (C, A)$
 $K \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{BC} = (B, C)$
 $K \parallel \vec{AB} \Rightarrow \vec{AB} = (A, B)$
 $K \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{AC} = (C, A)$
 $K \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{BC} = (B, C)$

2.15. Dane są punkty $A = (4, 5)$, $B = (-4, -1)$ i prosta k o równaniu $x - 3y - 9 = 0$.
a) W Na prostej k znajdź punkt C jednakowo oddalony od punktów A i B .
b) Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt A i nachylonej do osi Ox pod kątem dwa razy większym niż prosta k .

$k: x - 3y - 9 = 0$
 $x = 3y + 9$
 $y = \frac{1}{3}x - 3$
 $(0, -3)$
 $(3, -2)$
 $C(3y + 9, y)$
 $|x_A - x_C|^2 + |y_A - y_C|^2 = |x_B - x_C|^2 + |y_B - y_C|^2$
 $(4 - (3y + 9))^2 + (5 - y)^2 = (-4 - (3y + 9))^2 + (-1 - y)^2$
 $(-5 - 3y)^2 + (5 - y)^2 = (-13 - 3y)^2 + (-1 - y)^2$
 $25 + 30y + 9y^2 + 25 - 10y + y^2 = 169 + 78y + 9y^2 + 1 + 2y + y^2$
 $50 + 20y = 170 + 80y$
 $-120 = 60y$
 $y = -2$
 $x = 3y + 9 = -6 + 9 = 3$
 $C(3, -2)$

Dane są punkty $A = (4, 5)$, $B = (-4, -1)$ i prosta k o równaniu $x - 3y - 9 = 0$.

a) W Na prostej k znajdź punkt C jednocześnie oddalony od punktów A i B .

b) Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkt A i nachylonej do osi Ox pod kątem dwa razy większym niż prosta k .

$S(0, 2)$

1) $S = \text{środek}$

2) $\vec{AB} = [-8; -6]$

$L: -8x - 6y + C = 0$

$S: -4 \cdot 0 - 6 \cdot 2 + C = 0$

$C = 12$

$L: -8x - 6y + 12 = 0$

$x - 3y - 9 = 0$

$x = 3$

$y = -2$

(0-4) Okrąg o środku w punkcie $S = (3, 7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y = 2x - 3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

$k: 2x - y - 3 = 0$

$S(3, 7)$

$P(x, y)$

$d(S, k) = \frac{|2 \cdot 3 - 7 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$d(S, P) = d(S, k)$

$\sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 = \frac{16}{5}$

$5x^2 - 30x + 45 + 5y^2 - 70y + 245 = 16$

$5x^2 - 30x + 5y^2 - 70y + 229 = 0$

$x_1 \dots x_2$

$k: y = 2x - 3$

$L \perp k: y = -\frac{1}{2}(x-3) + 7$

$y = 2x - 3$

$2x - 3 = -\frac{1}{2}(x-3) + 7$

$1,5x = 14,5$

$x = 9\frac{1}{3}$

$y = 6\frac{1}{3}$

$(9\frac{1}{3}; 6\frac{1}{3})$

232. Okrąg styczny do osi Ox w punkcie $A = (-3, 0)$ odcina na dodatniej półosi osi Oy cięciwę o długości 8.

a) Znajdź współrzędne środka i długość promienia okręgu.

b) Podaj współrzędne punktów, w których okrąg przecina oś Oy .

$A(-3, 0)$

$S(0, 4)$

$r = 4$

TRÓJKĄT

250. Punkty $A = (12, 6)$ i $B = (16, 3)$ są wierzchołkami trójkąta ABC . Oblicz długość odcinka łączącego środki boków AC i BC .

251. Punkty $B = (2, -6)$ i $C = (4, 14)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , a punkt $P = (1, -2)$ jest środkiem boku AB . Wyznacz równanie prostej zawierającej bok AC .

252. (0-4) Punkty $A = (2, 11)$, $B = (8, 23)$, $C = (6, 14)$ są wierzchołkami trójkąta. Wysokości trójkąta poprowadzone z wierzchołka C przecinają prostą AB w punkcie D . Oblicz współrzędne punktu D .

253. Prosta o równaniu $y = x - 2$ przechodzi przez punkty $A = (0, 0)$, $B = (5, 0)$. Oblicz pole trójkąta ABC , w którym $C = (9 - a, 0)$.

254. (0-2) Proste l i k przecinają się w punkcie $A = (0, 4)$. Prosta l wyznacza wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o polu 8, zaś prosta k – trójkąt o polu 10. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty oraz punkty przecięcia prostych l i k z osią Ox .

255. Punkty $A = (5, -2)$ i $B = (7, 2)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym przy wierzchołku A . Wierzchołek C należy do prostej o równaniu $y = 2x + 3$.

a) Wyznacz współrzędne punktu C .

b) Oblicz pole trójkąta ABC .

256. W Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-1, 0)$, $B = (-1, 0)$, $C = (2, \sqrt{3})$. Wyznacz kąt trójkąta ABC .

257. Dwie wysokości trójkąta ABC , gdzie $A = (-2, -3)$, zawarte są w prostych o równaniach $x - 2 = 0$ i $2x + 3y - 1 = 0$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

258. W Punkty $A = (-2, -2)$ i $B = (4, 1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC , a punkt $D = (0, 1)$ punktem przecięcia jego wysokości. Znajdź współrzędne wierzchołka C .

259. Proste o równaniach $3x - 2y + 2 = 0$ i $x - y + 2 = 0$ zawierają dwa boki pewnego trójkąta, a prosta o równaniu $2x - y - 1 = 0$ zawiera jedną z jego środkowych. Znajdź równanie prostej zawierającej trzeci bok trójkąta.

260. (0-4) Podstawą trójkąta równobocznego ABC jest odcinek o końcach $A = (2, 1)$ i $B = (5, 2)$. Jedną z innych trójkątów zawieszonych wewnątrz $2x - y - 3 = 0$. Oblicz współrzędne wierzchołka C .

261. (0-4) Dany jest trójkąt równoboczny ABC , w którym $|AC| = |BC|$ oraz $A = (2, 1)$ i $C = (1, 9)$. Podstawa AB tego trójkąta jest zawieszona w prostej $y = \frac{1}{2}x$. Oblicz współrzędne wierzchołka B .

262. R Punkt $C = (-1, 4)$ jest wierzchołkiem trójkąta równobocznego ABC , którego podstawa AB zawiera się w prostej o równaniu $y = 2x + 4$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków trójkąta. Wiedząc, że długość podstawy AB jest równa długości wysokości tego trójkąta opuszczonej z wierzchołka C .

84. * Punkt $S = (-1, 2)$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wierzchołek A ma współrzędne $(-4, 1)$, a bok BC jest zawarty w prostej o równaniu $y = -2x + 5$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków trójkąta ABC .

