

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2x+1} \quad f(x) = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)' \cdot (x^2+2x+1) - (x^2+2x+1)' \cdot (x^2-4)}{(x^2+2x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - (2x+2)(x^2-4)}{(x+1)^4}$$

$$\frac{2(x+1)(x^2+x-x^2+4)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)(x+4)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+4)}{(x+1)^3}$$

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2x+1} \quad f(x) = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2}$$

TW  $y = a(x-p) + q$

$f'(x_0) = 0$

$x_0 = p$

$f(x_0) = q$

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$y = a(x-p) + q$

2.85

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2x+1} \quad f'(x) = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2}$$

$P(x_0, \frac{5}{4})$

$\frac{5}{4} = \frac{x_0^2-4}{x_0^2+2x_0+1}$

$4x_0^2-16 = 5x_0^2+10x_0+5$

$x_0^2+10x_0+11 = 0$

$(x_0+3)(x_0+7) = 0$

$x_0 = -3$  or  $x_0 = -7$

$f'(-3) = \frac{2}{-2} = -1$

$f'(-7) = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

$y = -1(x+3) + \frac{5}{4}$

$y = -\frac{1}{2}(x+7) + \frac{5}{4}$

2.86. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$  w punkcie  $P(x_0, -9)$ . Ile punktów wspólnych z wykresem funkcji  $f$  ma ta styczna?

1)  $y = a(x-p) + q$

$-9 = \frac{x_0^2}{x_0+2}$   $x_0^2 + 9x_0 + 18 = 0$   $(x_0+3)(x_0+6) = 0$   $x_0 = -3$   $x_0 = -6$

$(-3, -9)$   $(-6, -9)$   $a = ?$

2)  $f'(x) = \left(\frac{x^2}{x+2}\right)' = \frac{2x(x+2) - x^2 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

$f'(-3) = \frac{9-12}{1} = -3 = a$

$f'(-6) = \frac{36-24}{4} = \frac{12}{4} = 3 = a$

$y = -3(x+3) - 9$

$y = \frac{3}{2}(x+6) - 9$

$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

2.139. Wykaż, że najmniejszy kąt, pod jakim może być nachylenia do osi OX styczna do wykresu funkcji  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 8$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ , jest równy  $45^\circ$ .

$\alpha = f'(x_0) = \tan \alpha$

$y = a(x-p) + q$

$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 13x - 8)' = 3x^2 - 12x + 13$

$f'(x_0) = 3x_0^2 - 12x_0 + 13 = \alpha = \tan \alpha \geq 1 \Rightarrow \alpha \geq 45^\circ$

$3x_0^2 - 12x_0 + 13 \geq 1 \Leftrightarrow TE \Delta A$

$3x_0^2 - 12x_0 + 12 \geq 0$

$x_0^2 - 4x_0 + 4 \geq 0$

$(x_0 - 2)^2 \geq 0$

$x_0 = 2$

$\alpha = 45^\circ$

2.9. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $P$ , jeśli:

a)  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ,  $P(x_0, 4)$

b)  $f(x) = \frac{2-x}{x-1}$ ,  $P(x_0, -4)$

c)  $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ ,  $P(x_0, \frac{1}{2})$

d)  $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ ,  $P(x_0, -9)$

e)  $f(x) = \frac{x^2-4}{(x+1)^2}$ ,  $P(x_0, \frac{5}{4})$

f)  $f(x) = \frac{x^2-6}{(x-2)^2}$ ,  $P(x_0, \frac{5}{2})$

**2.11.** Wyznacz współrzędne takiego punktu  $A$ , że styczna do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $A$  jest prostopadła do prostej  $k$ .

a)  $f(x) = -x^2 + x + 2$ ,  $k: x - 5y + 10 = 0$ ,  
b)  $f(x) = 3x^2 + x - 2$ ,  $k: x - 5y - 10 = 0$ ,  
c)  $f(x) = \frac{3-x}{1-x}$ ,  $k: 2x + y - 5 = 0$ ,  
d)  $f(x) = \frac{2-x}{x+4}$ ,  $k: 6x - y + 4 = 0$ ,  
e)  $f(x) = \frac{1}{x^4}$ ,  $k: x + 4y - 8 = 0$ ,  
f)  $f(x) = -\frac{2}{x^3}$ ,  $k: x + 10y = 0$ .

Zilustruj zadanie rysunkiem.

**2.12.** Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = \sqrt{x}$ , równoległej do prostej przechodzącej przez punkty  $A(-1, 0)$  oraz  $B(0, 1)$ .

**2.13.** Oblicz pole trójkąta ograniczonego dodatnimi półosiąmi układu współrzędnych i tą styczną do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$ , która jest prostopadła do prostej o równaniu  $2x - y - 3 = 0$ .

**2.14.** Oblicz pole trójkąta ograniczonego ujemnymi półosiąmi układu współrzędnych i tą styczną do wykresu funkcji  $f(x) = \frac{2-x}{x+2}$ , która jest równoległa do prostej o równaniu  $4x + y - 11 = 0$ .

[illegible]

2.15. W którym punkcie wykresu funkcji  $f(x) = -x^3$  należy poprowadzić styczną na tego wykresu, aby pole trójkąta ograniczonego tą styczną i osiami układu współrzędnych było równe 54?

**2.16.** W którym punkcie wykresu funkcji  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  należy poprowadzić styczną do tego wykresu, aby pole trójkąta ograniczonego tą styczną i osiami układu współrzędnych było równe  $\frac{9}{8}$ ?

1.50

**2.17.** Znajdź równania prostych  $k$  oraz  $l$  stycznych do krzywej, będącej wykresem funkcji  $f(x) = -x^2 - 9$ , przechodzących przez punkt  $A(4, 0)$ . Oblicz pole trójkąta  $ABC$ , gdzie  $B$  i  $C$  są punktami styczności prostych  $k$  i  $l$  do tego wykresu.

**2.18.** Znajdź równanie tej stycznej do wykresu funkcji  $f(x) = 16x^2 + \frac{1}{x}$ , która przechodzi przez punkt  $A(0, 0)$ .

**2.19.** Znajdź równanie wspólnej stycznej do wykresów funkcji  $f(x) = x^2 + 4x + 8$  oraz  $g(x) = x^2 + 8x + 4$ .

**2.20.** Funkcja  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  ma ekstrema w punktach  $x_1$  i  $x_2$ . Do wykresu tej funkcji poprowadzono styczne w punktach o odciętych  $-2$ ,  $2$ ,  $x_1$  i  $x_2$ . Wykaż, że czworokąt utworzony przez te styczne ma środek symetrii  $S$ . Znajdź współrzędne punktu  $S$ .

**2.21.** Wykaż, że pole trójkąta ograniczonego styczną do hiperboli  $xy = k^2$  ( $k \neq 0$ ), poprowadzoną w punkcie należącym do tej hiperboli, oraz asymptotami tej hiperboli nie zależy od współrzędnych tego punktu.

**2.22.** Dany jest wielomian  $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ . Wiadomo, że jest on podzielny bez reszty przez wielomian  $P(x) = x^2 + cx + 1$  oraz, że współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu wielomianu  $W(x)$  w punkcie o odciętej  $x = 1$  jest równy  $c$ . Wyznacz  $a$ ,  $b$  i  $c$ , a następnie znajdź równanie stycznej do wielomianu  $W(x)$  w punkcie o odciętej  $x = 3$ .

**2.23.** Dla jakich wartości  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  wykres funkcji  $f(x) = x^3 - x - \cos 2\alpha - \sin \alpha + 3$  jest styczny do prostej  $y = 2x$ ?

**2.24.** Dana jest funkcja  $f(x) = x^3 + kx - 2$ , gdzie  $k \geq 0$ . Wykaż, że żadna z dwóch (różnych) stycznych do wykresu tej funkcji nie jest do drugiej prostopadła.

**2.25.** Dana jest funkcja  $f(x) = x^3 + kx - 2$ , gdzie  $k \geq 0$ . Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele par różnych prostych równoległych, które są styczne do wykresu tej funkcji.