

Zadanie 4. (0-1)

Pole trójkąta T_1 podobnego do trójkąta T jest o 156% większe od pola trójkąta T . Zatem suma długości wszystkich wysokości trójkąta T jest mniejsza od sumy długości wszystkich wysokości trójkąta T_1 :

A. 25%

B. 37,5%

C. 44%

D. 62,5%

$$T_1 = 156\% T$$

$$\frac{T_1}{T} = 1,56 = \frac{156}{100} = \left(\frac{16}{10}\right)^2$$

$$dT_{T_1} = \frac{16}{10} dT$$

~~$$T = p\% T = T_1$$~~

~~$$dT_{T_1} - p\% dT_{T_1} = dT$$~~

$$U - p\% U = M$$

~~$$dT_{T_1} - p\% dT_{T_1} = dT = \frac{10}{16} dT_{T_1}$$~~

$$1 - p\% = \frac{10}{16}$$

$$p\% = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \cdot 100 =$$

$$p = 37,5\%$$

Zadanie 4. (0-1)

Pole trójkąta T_1 podobnego do trójkąta T jest o 156% większe od pola trójkąta T . Zatem suma długości wszystkich wysokości trójkąta T jest mniejsza od sumy długości wszystkich wysokości trójkąta T_1 o:

A. 25%

B. 37,5%

C. 44%

D. 62,5%

$$\Delta T_1 \sim \Delta T_2$$

$$\underline{U} - p\% \underline{U} = \underline{M}$$

$$d h_{T_1} - p\% d h_{T_1} = \frac{10}{16} d h_{T_1}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{d h_{T_2}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_M$

$$P_{T_1} = 256\% P_T = 2,56 P_T$$

$$k = 1,6$$

$T_1 - u$
 $T_2 - M.$

$$d h_{T_1} = d h_T \cdot 1,6$$

$$d h_T = \frac{10}{16} d h_{T_1}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_M$

Zadanie 4. (0–1)

Pole trójkąta T_1 podobnego do trójkąta T jest o 156% większe od pola trójkąta T . Zatem suma długości wszystkich wysokości trójkąta T jest mniejsza od sumy długości wszystkich wysokości trójkąta T_1 o:

A. 25%

B. 37,5%

C. 44%

D. 62,5%

$$W - p\% W = 1.$$

BCABC 1-5

6 5 625

Zadanie 6. (0-2)

Rozwiąż równanie $f(x) - f'(x) = 2$, gdzie $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$, $x \neq -3$. Zakoduj czwartą potęgę liczby, która jest rozwiązaniem tego równania, podając jej cyfrę setek, dziesiątek i jedności. 625

Zadanie 7. (0-2)

Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^n}{2 \cdot 3^{n+2}}$. Zakoduj otrzymany wynik, podając trzy kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanej liczby.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \frac{1-3^{n+1}}{1-3}}{2 \cdot 3^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3 \cdot 3^n}{-4 \cdot 3^n \cdot 9} \cdot \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^n} - 3}{-4 \cdot 9} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{-4 \cdot 9} = \frac{1}{-12} = 0,083$$

Zadanie 8. (0-2)

W prostokącie $ABCD$, w którym $|AB| > |AD|$, poprowadzono dwusieczną kąta A , która przecięła bok CD w punkcie K . Wiedząc, że w czworokąt $ABCK$ można wpisać okrąg, oblicz $|AB| : |AD|$.

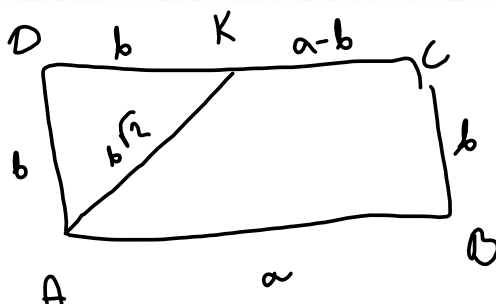
odp.

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

==

$$\boxed{\frac{a}{b} = ?}$$

X



$$a + a - b = b + b\sqrt{2} / b$$

$$2\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{2}$$

$$X = \frac{a}{b} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

Zadanie 9. (0-2)

Wykaż, że wartość wyrażenia $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$ jest liczbą wymierną.

$$= \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log 6}{\log 7} \cdot \frac{\log 7}{\log 8} = \frac{\log 1}{\log 8} = \frac{\log 1}{3 \log 2} = \frac{1}{3}$$

Zadanie 10. (0-2)

Wykaż, że jeśli dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość $x + y = 2\sqrt{2}$, to $x \cdot y \leq 2$.

$$Z: x + y = 2\sqrt{2}$$

$$T: x \cdot y \leq 2$$

rz. I

$$D: (x+y) = 2\sqrt{2} \Rightarrow (x+y)^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 8 \quad | - 4xy$$

$$0 \leq (x-y)^2 = 8 - 4xy$$

$$4xy \leq 8 \quad \boxed{xy \leq 2}$$

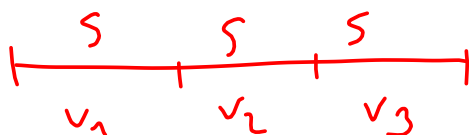
UkŁadanie

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{xy}{x+y} \quad i \text{ wi} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{2} \geq \frac{xy}{2\sqrt{2}}$$

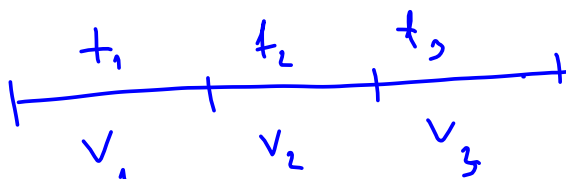
$$\boxed{xy \leq 2}$$

śr. har.

$$\bar{v} = \frac{3}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}}$$



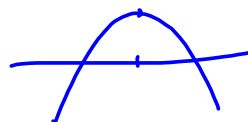
$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3}$$



$$y = \sqrt{2} - x$$

$$\underline{xy \leq 2}$$

$$\underline{y = x(\sqrt{2} - x)}$$



Zadanie 11. (0-3)

Ciąg geometryczny (b_n) określony jest wzorem $b_n = \left(\frac{4}{3} \cos^2 x\right)^n$, jeśli $n \in \mathbb{N}_+$. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x , dla których szereg $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots$ jest zbieżny.

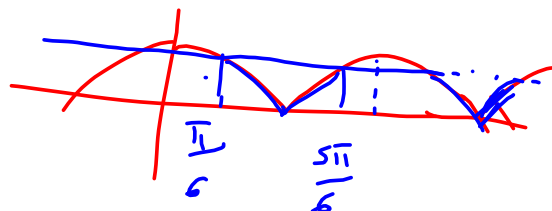
szereg geometryczny - suma nieskończoności czy nie

$$\begin{cases} S \\ |q| < 1 \end{cases}$$

$$\text{zbieżny} \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$|q| = \left|\frac{4}{3} \cos^2 x\right| < 1$$

$$|\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\underline{x \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi\right)}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Zadanie 12. (0-3)

Wysokości w pewnym trójkącie mają długość $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. Wykaż, że jest to trójkąt prostokątny.

$$P = \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{3} \quad a = 6P$$

$$P = \frac{1}{2} b \cdot \frac{1}{4} \quad b = 8P$$

$$P = \frac{1}{2} c \cdot \frac{1}{5} \quad c = 10P$$

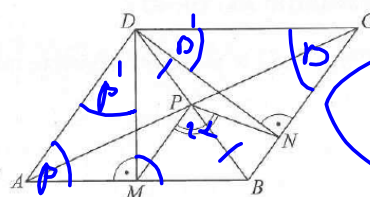
$$\hat{=} \\ a^2 + b^2 = c^2$$

$$(6P)^2 + (8P)^2 = (10P)^2 \quad \text{dl. } c$$

$$\Delta \text{ i } 17 - c - d /$$

Zadanie 13. (0-3)

W równoległoboku $ABCD$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P . Z wierzchołka D kąta rozwartego równoległoboku poprowadzono wysokości DM i DN (jak na rysunku obok). Wiadomo, że sinus kąta ostrego równoległoboku jest równy $0,8$. Wyznacz cosinus kąta (wypukłego) MPN .

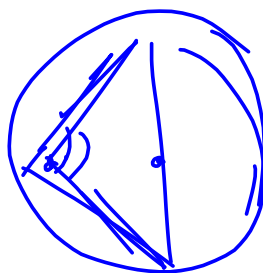


Sinus α to $\sin \alpha$

można $\angle BND$ da się opisać odległość bo $DM \perp AB$ i $DN \perp BC$ $\Rightarrow$ $\angle MPN = 180^\circ - \alpha$
 $DM \perp AB$ i $DN \perp BC$ $\Rightarrow$ $\angle MPN = 180^\circ - \alpha$

$$\cos \alpha = ?$$

$$\sin \alpha = 0,8$$



$$|\angle ADC| = \beta'$$

$$|\angle MDN| = \beta'' - 2\beta' = \beta = \alpha$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \cdot 0,64 = -0,28$$

Zadanie 14. (0-4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru a , $a \in \mathbf{R}$, dla których wykresy funkcji liniowych f i g przecinają się w punkcie należącym do koła o środku $S(0, -1)$ i promieniu $\sqrt{2}$, jeśli $f(x) = x - 1$ i $g(x) = 2 + ax$.

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq 2 \\ y = x - 1 \\ y = ax + 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{1-a} \quad \boxed{a \neq 1}$$

$$y = \frac{a+2}{1-a}$$

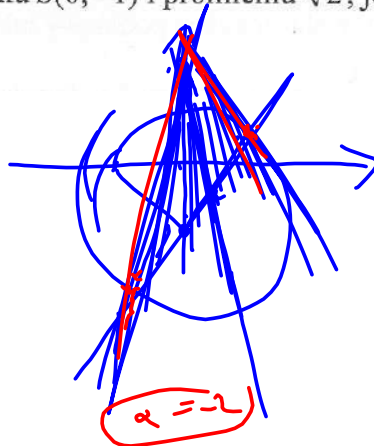
$$\frac{3^2}{(1-a)^2} + \frac{3^2}{1} \leq 2$$

$$\frac{18}{(1-a)^2} \leq 1$$

$$(a-1)^2 \geq 9$$

$$|a-1| \geq 3$$

$$a \geq 4 \vee a \leq -2$$



$a \neq$

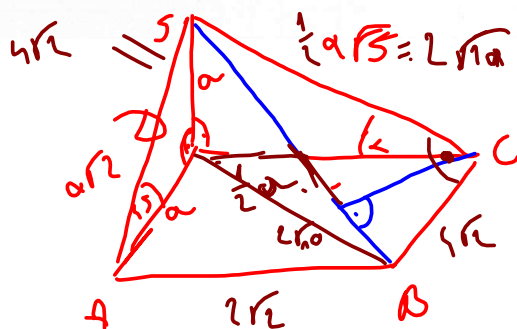
$a = 1$

$$\boxed{a \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)}$$

Zadanie 15. (0-5)

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest prostokąt $ABCD$. Krawędź DS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Krawędź AS jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° , zaś krawędź CS tworzy z płaszczyzną podstawy taki kąt α , że $\tan \alpha = 2$. Wiedząc, że objętość ostrosłupa

jest równa $\frac{64\sqrt{2}}{3}$, oblicz odległość wierzchołka C od krawędzi BS .



$$V = \frac{64\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a$$

$$a = \sqrt[3]{128\sqrt{2}}$$

$$a = \sqrt[3]{128\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2^7 \cdot 2^{1/2}} = \sqrt[3]{2^{13/2}}$$

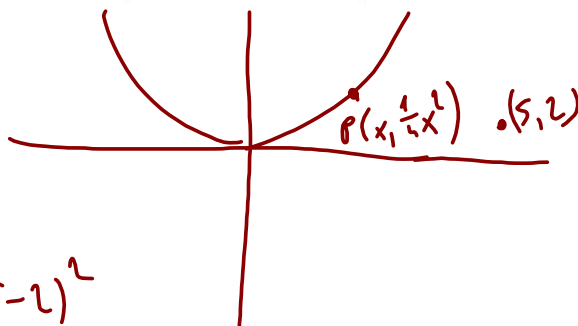
$$a = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{40 + 32} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \Rightarrow 6\sqrt{2}x = 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$

Zadanie 16. (0-5)

Na paraboli o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2$ wyznacz taki punkt P , którego odległość od punktu $A(5, 2)$ jest najmniejsza.



$$d^2 = (5-x)^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right)^2$$

$$D: x \in \mathbb{R}$$

$$d^2 \sim L \sim$$

$$\tilde{d}(x) = \frac{1}{16}x^4 - 10x + 29$$

$$\boxed{x = \sqrt[3]{25}}$$

$$\boxed{y = \sqrt[3]{25}}$$

Zadanie 17. (0-6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru k , dla których dwa różne miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = (k-1)x^2 - (k-2)x + k$ należą do przedziału $(-1, 2)$.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ x_1, x_2 \in (-1, 2) \end{cases}$$

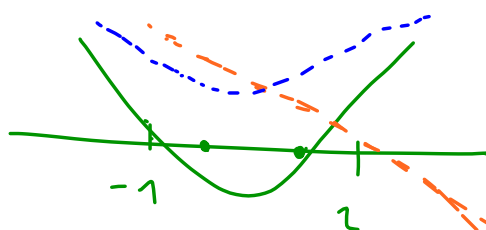
$$\begin{cases} k \neq 1 \\ k \in \left(-\frac{2}{13}; \frac{2}{13}\right) \end{cases}$$

odp

$$\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}; 0\right)$$

↓

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1 > 0 \\ x_2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1 + x_2 + 1 > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 + x_2 - 2 < 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

↓ $\Delta > 0$ 

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(2) > 0 \\ p \in (-1, 2) \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} a < 0 \\ f(-1) < 0 \\ f(2) < 0 \\ p \in (-1, 2) \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot f(-1) > 0 \\ a \cdot f(2) > 0 \\ p \in (-1, 2) \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

Zadanie 18. (0-6)

Rzucamy pięć razy symetryczną, sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wyrzuceniu co najmniej dwa razy ścianki z pięcioma oczkami, jeżeli wiadomo, że ścianka z sześcioma oczkami również wypadła co najmniej dwa razy.

$$\boxed{\frac{10}{109}}$$

$$\begin{aligned} A &= 5 \text{ co } 2 \text{ razy} \\ B &= 6 \text{ co } 2 \text{ razy} \\ A \cap B &= 5 \text{ co } 2 \text{ razy i } 6 \text{ co } 2 \text{ razy} \end{aligned}$$

$$\bar{B} =$$

$$\bar{B} = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$5^5 - 2 \cdot 5^2 = \bar{B}$$

$$\bar{B} = 6^5 - 2 \cdot 5^5$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \binom{5}{2} \binom{1}{2} \cdot 4 + \\ &\quad \binom{3}{2} \binom{2}{2} \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2 \times 5 \quad 2 \times 6 \quad 1 \\ &3 \times 5 \quad 2 \times 6 \\ &2 \times 5 \quad 2 \times 6 \end{aligned}$$

$$A \cap B = 10 \cdot 3 \cdot 4 + 10 \cdot 2 = 140$$

$$P(A/B) = \frac{140}{1526} = \frac{10}{109}$$

