

Zadanie 33. (0-2)

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy kolejno dwie różne liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma tych liczb jest parzysta?

Zadanie 34. (0-5)

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 27, a pole powierzchni bocznej 108. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 32. (0-4)

Rozwiąż równanie $1 + 4 + 7 + \dots + x = 1335$, w którym lewa strona jest sumą pewnej liczby kolejnych, początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Zadanie 33. (0-2)
Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy kolejno dwie różne liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma tych liczb jest parzysta?

~~10, 11, 12, 13, ... 99~~ 90 liczb.

$99 - 10 + 1 = 90$

n - losujemy 2 różne liczby = 90

A - suma ich jest parzysta $(P: P \vee N: N)$

$P: 45$
 $N: 45$

$\bar{A} = 45 \cdot 44 \cdot 2$

$P(A) = \frac{45 \cdot 44 \cdot 2}{90 \cdot 89} = \frac{44}{89}$

$\frac{0}{45} \cdot \frac{0}{44} + \frac{4}{45} \cdot \frac{4}{44}$

3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99

podnieśliśmy parzyste

$90:2 = 45$

0 - 12 + 1
1 - 12 + 1
2 - 12
3 - 12 + 1
4 - 12 + 1
5 - 12 + 1
6 - 12 + 1

25

16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99

91 - 12 + 1 = 75

77 5

3
0 25
1 25 + 1
2 25 + 1

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

mieć m.2.

$$T \quad 1+c > b$$

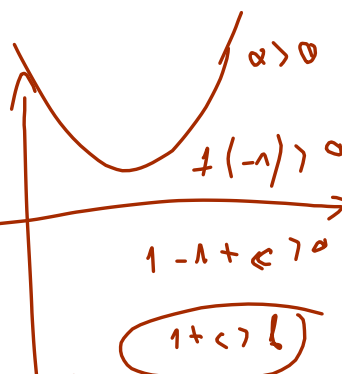
$$D: \text{dla każdego } x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$$

$$\text{Wiemy, że: } f(0) = c > 0$$

$$f(1) = 1+b+c > 0$$

$$1+c > -b$$

$$f(-1) = 1-b+c > 0 \Rightarrow 1+c > b$$



Zadanie 32. (0-4)

Rozwiąż równanie $1 + 4 + 7 + \dots + x = 1335$, w którym lewa strona jest sumą pewnej liczby kolejnych, początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$\begin{aligned} n &= 3 \\ a_1 &= 1 \\ a_n &= x \\ S_n &= 1335 \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$1335 = \frac{1+x}{2} \cdot n$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$x = 1 + (n-1) \cdot 3$$

$$1335 = \frac{2 + 3n-3}{2} \cdot n \quad | \cdot 2$$

$$2670 = 3n^2 - n$$

$$3n^2 - n - 2670 = 0$$

$$\Delta = 1 + 12 \cdot 2670 = 179^2$$

$$n_1 = \frac{1+179}{6} = 30$$

$$x = 1 + 29 \cdot 3 = \underline{\underline{88}}$$

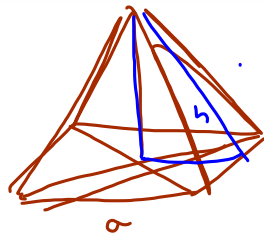
Zadanie 34. (0-5)

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 27, a pole powierzchni bocznej 108. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

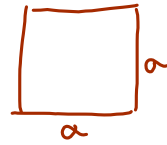
$$108 = 4 \cdot \frac{1}{2} h a$$

$$54 = h \cdot \sqrt{27}$$

$$h = \frac{54}{3\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$



$$P_b = 4 P_{\Delta}$$



$$a = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

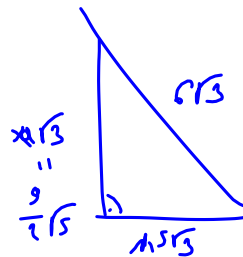
$$x^2 + 1,5^2 = 6^2$$

$$x^2 = 6^2 - 1,5^2 = (6-1,5)(6+1,5)$$

$$x^2 = \frac{9}{2} \cdot \frac{15}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \sqrt{15}$$

$$x\sqrt{3} = \frac{3}{2} \sqrt{15 \cdot 3} = \frac{9}{2} \sqrt{5}$$



$$V = \frac{1}{3} 27 \cdot \frac{9}{2} \sqrt{5}$$

Zadanie 31. (0-2)

Długości boków równoległoboku o polu równym 35 różnią się o 3. Kąt między bokami ma miarę 30° . Oblicz obwód tego równoległoboku.

$$P_r = a \cdot h = ab \sin \alpha$$

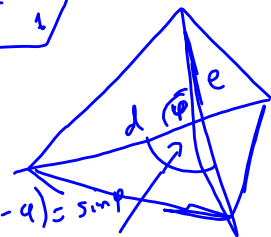
$$35 = \frac{1}{2} a b$$

$$a = b + 3$$



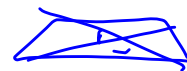
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$



$$180^\circ - \alpha$$

$$P_{c2} = \frac{1}{2} d \cdot e \cdot \sin \varphi$$



$$70 = (b+3) \cdot b$$

$$b^2 + 3b - 70 = 0$$

$$(b+10)(b-7) = 0$$

$$b \neq -10$$

$$b = 7$$

$$a = 10$$

$$2a + 2b = 34$$

Zadanie 30. (0-2)

Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, wyznacz wartość wyrażenia $\frac{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha - \sin \alpha}$.

Zadanie 29. (0-4)

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma jedno miejsce zerowe oraz $f(3) = f(7) = 2$. Wyznacz wartości współczynników a, b, c występujących we wzorze funkcji f .

Zadanie 28. (0-2)

Udowodnij, że kąt ostry między przekątnymi prostokąta ma miarę dwukrotnie większą niż kąt między przekątną a dłuższym bokiem prostokąta.

Zadanie 27. (0-2)

Uzasadnij, że liczba $2^{100} + 2^{101} + 2^{102}$ jest podzielna przez 7.

Zadanie 30. (0-2)

Wiedząc, że α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, wyznacz wartość wyrażenia $\frac{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha - \sin \alpha} = X$

$$\alpha \in (0; 90^\circ)$$

$$\downarrow$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\parallel$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$$

$$3 \sin \alpha = 4 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha$$

$$X = \frac{3 \sin \alpha + 1.5 \sin \alpha}{\frac{15}{4} \sin \alpha - \sin \alpha} = \frac{4.5 \sin \alpha}{\frac{11}{4} \sin \alpha} = \frac{\frac{18}{4}}{\frac{11}{4}} = \frac{18}{11} = 1 \frac{7}{11}$$

Zadanie 29. (0-4)

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma jedno miejsce zerowe oraz $f(3) = f(7) = 2$. Wyznacz wartości współczynników a, b, c występujących we wzorze funkcji f .

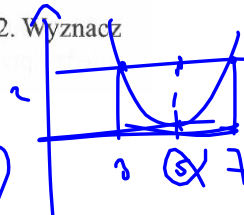
$\Delta = 0$
 $f(3) = f(7) = 2$

$p = \frac{3+7}{2} = 5$ $W(5, 0)$

$q = 0$ $f(x) = a(x-5)^2$

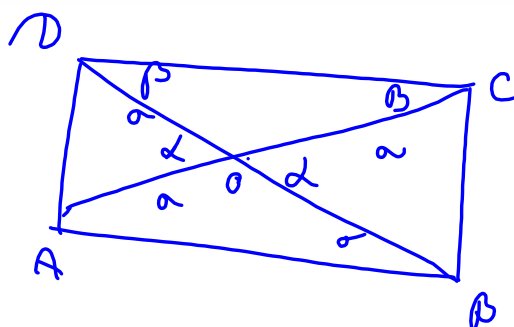
$2 = f(3) = a(-2)^2 = 4a$
 $a = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 10x + 25)$
 $\frac{1}{2}x^2 - 5x + 12,5$



Zadanie 28. (0-2)

Udowodnij, że kąt ostry między przekątnymi prostokąta ma miarę dwukrotnie większą niż kąt między przekątną a dłuższym bokiem prostokąta.



$$\alpha: \alpha = 2\beta$$

$$D: |\angle CDO| = |\angle OCB| = \beta$$

$$\Downarrow$$

$$|\angle BOC| = 180 - 2\beta = 180 - \alpha$$

$$\boxed{\alpha = 2\beta}$$

Zadanie 27. (0-2)

Uzasadnij, że liczba $2^{100} + 2^{101} + 2^{102}$ jest podzielna przez 7.

$$x = 2^{100}(1 + 2 + 2^2) = 2^{100} \cdot 7 \quad 2^{100} \in \mathbb{C} \Rightarrow T$$

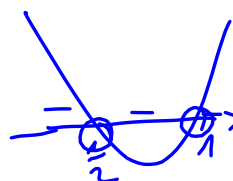
$7/x$ $\boxed{\frac{1}{2} \cdot 7}$

Zadanie 26. (0-2)

Rozwiąż nierówność $x^2 - \frac{3x-3}{2} < 1$. / .2

odp. $(\frac{1}{2}, 1)$

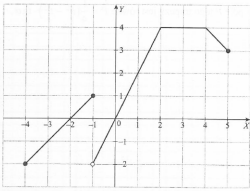
$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 3 &< 2 \\ 2x^2 - 3x + 1 &< 0 \\ 2(x-1)(x-\frac{1}{2}) &< 0 \end{aligned}$$



Zadanie 27. (0-2)
Wykaż, że suma liczby dwucyfrowej i liczby powstałej z przestawienia jej cyfr jest wielokrotnością liczby 11.

Zadanie 28. (0-2)
Udowodnij, że jeśli w trapezie równoramiennym podstawy mają długości a i b ($a > b$), a kąt ostry ma miarę α , to pole P tego trapezu jest równe $P = \frac{1}{4}(a^2 - b^2) \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Zadanie 29. (0-2)
Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f określonej na przedziale $(-4, 5)$.



Na jego podstawie podaj zbiór wartości i przedziały monotoniczności funkcji f maksymalnej długości.

Zadanie 30. (0-2)
Jednym z miejsc zerowych funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest 5, a osią symetrii wykresu tej funkcji jest prosta $x = 2$. Wyznacz współrzędne punktu, w którym wykres funkcji f przecina oś OY .

Zadanie 31. (0-2)
Liczby 54, x , y , 128 są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Wyznacz x oraz y .

Zadanie 32. (0-4)
W czworokącie $ABCD$ kąt ABC jest o 30° większy niż kąt BAD , kąt BAD jest dwukrotnie mniejszy niż kąt BCD , natomiast kąt CDA jest o 18° mniejszy niż kąt BCD . Wyznacz miary kątów czworokąta $ABCD$.

Zadanie 33. (0-4)
Doświadczenie polega na czterokrotnym rzucie monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej 2 razy otrzymamy reszkę?

Zadanie 34. (0-5)
Wyznacz pole powierzchni bocznej graniastopu prawidłowego czworokątnego, którego przekątna ma długość $8\sqrt{2}$ i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$.

Zadanie 27. (0-2)

Wykaż, że suma liczby dwucyfrowej i liczby powstałej z przestawienia jej cyfr jest wielokrotnością liczby 11.

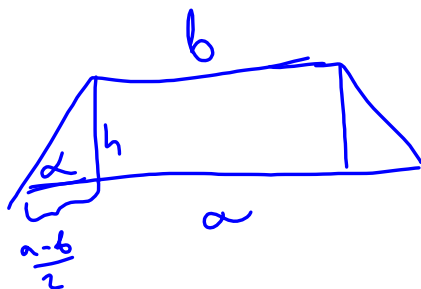
$$\begin{array}{r} 10x+y \text{ - } \text{set } h \text{ } h \\ + 10y+x \text{ - } \text{onek } h \text{ } h \\ \hline \end{array}$$

$$S = 10x + y + 10y + x = 11x + 11y = 11 \cdot (x+y) \Rightarrow$$

$$11 \mid S \text{ c.m.d.}$$

Zadanie 28. (0-2)

Udowodnij, że jeśli w trapezie równoramiennym podstawy mają długości a i b ($a > b$), a kąt ostry ma miarę α , to pole P tego trapezu jest równe $P = \frac{1}{4}(a^2 - b^2) \cdot \operatorname{tg} \alpha$.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\frac{a-b}{2}} = \frac{2h}{a-b}$$
$$h = \frac{a-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2 - b^2}{4} \operatorname{tg} \alpha$$

c.m.d./