

4. k pasażerów wsiada do pociągu złożonego z 3 wagonów, przy czym każdy wybiera wagon niezależnie i z jednakowym prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Zakładając, że $k \geq 3$, oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A - wszyscy wsiadają do jednego wagonu,
 B - dokładnie jeden wagon będzie pusty,
 C - żaden wagon nie będzie pusty.

$\Omega = \{\omega : \omega = (i_1, i_2, \dots, i_k) \wedge i_j \in \{1, 2, 3\}, \forall j=1, \dots, k\}$

$(1, 1, 1, \dots, 1) (1, 1, \dots, 1, 2) (1, 2, 1, \dots, 1) (1, 2, 1, \dots, 1)$

$\bar{A} = \bar{V}_3 = 3^k$

$A = \{\omega \in \Omega : i_1 = i_2 = \dots = i_k\}$ $\bar{A} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{3^k} = \frac{1}{3^{k-1}}$

$B = \{\omega \in \Omega : i_1 \in \{1, 2\}, i_2 \in \{1, 2\}, \dots, i_{k-1} \in \{1, 2\}, i_k = 3\} \cup \{\omega \in \Omega : i_1 = 3, i_2 \in \{1, 2\}, \dots, i_{k-1} \in \{1, 2\}, i_k = 1\} \cup \{\omega \in \Omega : i_1 = 3, i_2 \in \{1, 2\}, \dots, i_{k-1} \in \{1, 2\}, i_k = 2\}$

$\bar{B} = 3^k - 3$

$P(B) = \frac{3 \cdot 2^{k-1}}{3^k} = \frac{2^{k-1}}{3^{k-1}} = \frac{2^k - 2}{3^k}$

$\bar{C} = \bar{A} - \bar{B} = 3^k - 3 + 3 = 3^k$

$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{1}{3^{k-1}} - \frac{2^k - 2}{3^k}$

5. k pasażerów wsiada do pociągu złożonego z 3 wagonów, przy czym każdy wybiera wagon niezależnie i z jednakowym prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Zakładając, że $k \geq 3$, oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:

A - wszyscy wsiadają do jednego wagonu,
 B - dokładnie jeden wagon będzie pusty,
 C - żaden wagon nie będzie pusty.

$\bar{C} = \bar{A} - \bar{B} = 3^k - 3 + 3 = 3^k$

$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{1}{3^{k-1}} - \frac{2^k - 2}{3^k}$

6. Z ustalonego zbioru n liczb rzeczywistych losujemy kolejno k liczb, otrzymując ciąg różnowartościowy $(a_1, \dots, a_k)$. Zakładając, że $2 \leq k \leq n$, oblicz prawdopodobieństwo, że ten ciąg nie jest ciągiem rosnącym.

$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, \dots, a_k) \wedge a_i \in \{1, 2, \dots, n\}, a_i \neq a_j, i \neq j\}$

$\bar{\Omega} = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = V_n^k$

$A = \{\omega \in \Omega : a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$

$\bar{A} = \binom{n}{k} \cdot 1 = \binom{n}{k}$

$P(A) = 1 - \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = 1 - \frac{1}{k!}$

7. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 1000\}$ losujemy trójelementowy podzbiór $T = \{p, q, r\}$, przy czym prawdopodobieństwo wylosowania każdego podzbioru jest jednakowe.

a) Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn pqr jest podzielny przez 3.
 b) Niech φ będzie funkcją przyporządkowującą każdemu wylosowanemu podzbiorkowi T „element pośredni” (tzn. jeśli $p < q < r$, to $\varphi(T) = q$). Jaka wartość funkcji φ jest najbardziej prawdopodobna?

$\Omega = \{\omega : \omega = \{p, q, r\} \wedge p, q, r \in \{1, \dots, 1000\} \wedge p \neq q \neq r\}$

$\bar{\Omega} = \binom{1000}{3} = C_{1000}^3$ $(\{1, 2\} = \{1, 2\})$

$A = \{\omega \in \Omega : 3 | pqr\} = \{\omega \in \Omega : 3 | p \vee 3 | q \vee 3 | r\}$

$\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$

$\bar{A}_1 = \{\omega \in \Omega : 3 \nmid p\}$ $\bar{A}_2 = \{\omega \in \Omega : 3 \nmid q\}$ $\bar{A}_3 = \{\omega \in \Omega : 3 \nmid r\}$

$\bar{A}_1 = \frac{999}{3} = 333$ $\bar{A}_2 = \frac{999}{3} = 333$ $\bar{A}_3 = \frac{999}{3} = 333$

$\bar{A} = 333 \cdot 333 \cdot 333 = 333^3$

$P(A) = 1 - \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = 1 - \frac{333^3}{C_{1000}^3}$

5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n\}$, gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną, losujemy ze zwracaniem dwie liczby x i y . Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń

A : $x = y$; B : iloczyn xy jest liczbą parzystą; C : $\frac{x}{y} \in (0; 1)$.

6. Z ustalonego zbioru n liczb rzeczywistych losujemy kolejno k liczb, otrzymując ciąg różnowartościowy $(a_1, \dots, a_k)$. Zakładając, że $2 \leq k \leq n$, oblicz prawdopodobieństwo, że ten ciąg nie jest ciągiem rosnącym.

$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, \dots, a_k) \wedge a_i \in \{1, 2, \dots, n\}, a_i \neq a_j, i \neq j\}$

$\bar{\Omega} = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = V_n^k$

$A = \{\omega \in \Omega : a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$

$\bar{A} = \binom{n}{k} \cdot 1 = \binom{n}{k}$

$P(A) = 1 - \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}} = 1 - \frac{1}{k!}$

7. Rzucamy monetą n razy ($n \geq 2$). Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
 A : reszka wypadła dokładnie k razy;
 B : reszka wypadła więcej razy niż orzeł;
 C : przynajmniej dwa razy pod rząd moneta upadła tą samą stroną.

5. Ze zbioru $S = \{1, 2, \dots, 2012\}$ losujemy trzy liczby i ustawiamy je w ciąg rosnący (a, b, c) . Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń
 A : iloczyn abc jest liczbą parzystą,
 B_k : $b = k$, gdzie k jest ustaloną liczbą ze zbioru S .
Dla jakich k prawdopodobieństwo zdarzenia B_k jest największe?

5. Liczby $1, 2, \dots, n$, gdzie $n > 2$, przestawiamy w dowolny sposób. Oblicz prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:
 A – pierwszy wyraz otrzymanego ciągu będzie większy od ostatniego,
 B – liczby 1 i 2 nie będą ustawione obok siebie,
 C – liczby 1, 2 i 3 będą ustawione obok siebie w kolejności wzrastania.

7. Liczby $1, 2, 3, \dots, n$, gdzie $n \geq 3$, losowo ustawiamy w ciąg. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń
 A : liczba n nie będzie ostatnim wyrazem tego ciągu;
 B : liczby 1, 2, 3 wystąpią obok siebie w kolejności wzrastania;
 C : iloczyn każdej pary sąsiednich wyrazów tego ciągu jest liczbą parzystą.
Wyniki zapisz w najprostszej postaci.

