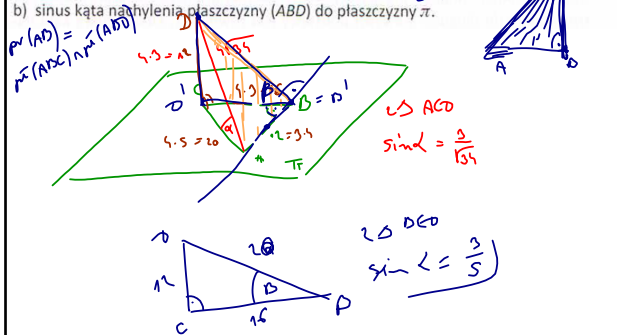


6.28. Prosta k przebija płaszczyznę π w punkcie A . Punkt B należy do prostej l , która jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę π oraz $|AB| = 8$ cm. Oblicz odległość punktu B od prostej k , jeśli kąt nachylenia prostej k do płaszczyzny π ma miarę:

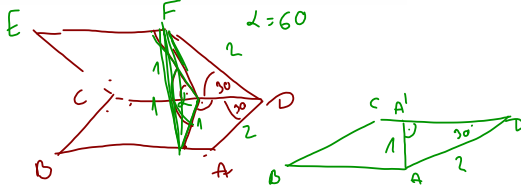
- a) 30° b) 45° c) 60° .

6.34. Trójkąt prostokątny ABC zawiera się w płaszczyźnie π , przy czym $\angle ABC = 90^\circ$ oraz $|AC| = 20$, $|AB| = 12$. Odcinek DC jest prostopadły do płaszczyzny π i ma długość 12. Oblicz:

- a) sinus kąta nachylenia prostej AD do płaszczyzny π b) sinus kąta nachylenia płaszczyzny (ABD) do płaszczyzny π .

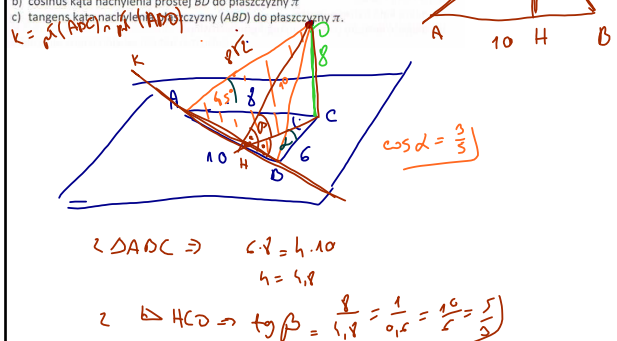


6.31. Dane są dwa przystające równoległoboki $ABCD$ i $DCEF$ o wspólnym boku DC . Miara kąta ostrego obu równoległoboków jest równa: $\angle CDA = \angle FDC = 30^\circ$. Płaszczyzny zawierające te równoległoboki tworzą kąt dwuścienny o mierze 60° . Wiedząc, że $|AD| = |DF| = 2$ dm, oblicz odległość między prostymi AB i EF .



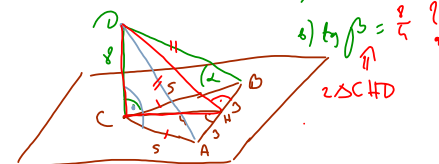
6.35. Trójkąt prostokątny ABC zawiera się w płaszczyźnie π , przy czym $|AB| = 10$, $|BC| = 6$ oraz $\angle ACB = 90^\circ$. Odcinek CD jest prostopadły do płaszczyzny π i ma długość 8. Oblicz:

- a) miarę kąta nachylenia prostej AD do płaszczyzny π
b) cosinus kąta nachylenia prostej BD do płaszczyzny π
c) tangens kąta nachylenia płaszczyzny (ABD) do płaszczyzny π .



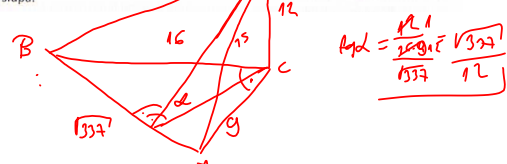
6.33. Trzy punkty A, B, C leżące na płaszczyźnie π wyznaczają trójkąt równoramienny, w którym $|AC| = |BC| = 5$ oraz $|AB| = 6$. Odcinek DC jest prostopadły do płaszczyzny π , a jego długość jest równa 8. Oblicz:

- a) tangens kąta nachylenia prostej BD do płaszczyzny π
b) tangens kąta nachylenia płaszczyzny (ABD) do płaszczyzny π .



6.71. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt prostokątny ABC , w którym przyprostokątne mają długość: $|AC| = 9$ cm, $|BC| = 16$ cm. Spodkiem wysokości ostrosłupa jest wierzchołek C . Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa 12 cm, oblicz:

- a) długość boków trójkąta ABS
b) tangens kąta nachylenia płaszczyzny (ABS) do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.



Zadania.

1.1. Dany jest czworościan $ABCD$. Odcinek BE jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wykazać, że jeśli DE jest wysokością tego czworościanu, to

$$\angle DAB = \angle DCB = 90^\circ.$$

1.2. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym wszystkie kąty przy wierzchołku A są proste. Dowiedzieć, że spodek wysokości tego czworościanu, opuszczonej z wierzchołka A jest ortocentrum trójkąta BCD .

1.3. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym

$$\angle ABC = \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ.$$

Udowodnić, że rzut prostokątny punktu D na płaszczyznę ABC jest punktem symetrycznym do punktu B względem środka krawędzi AC .

1.4. Udowodnić, że jeśli w czworościanie $ABCD$ krawędzie AB i CD są prostopadłe, to wysokości poprowadzone z wierzchołków C i D przecinają się.

1.5. Wykazać, że jeśli w czworościanie istnieje punkt wspólny wszystkich wysokości, to spodek każdej z nich pokrywa się z ortocentrum ściany, na której została ta wysokość poprowadzona.

1.6. Wykazać, że jeśli w czworościanie spodek pewnej wysokości pokrywa się z ortocentrum ściany, do której została ta wysokość poprowadzona, to każde dwie przeciwległe krawędzie są prostopadłe.

1.7. Rozstrzygnąć, czy istnieje czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami prostokątnymi.

1.8. Rozstrzygnąć, czy dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ istnieje ostrosłup $A_1A_2 \dots A_nS$ o podstawie $A_1A_2 \dots A_n$, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi.

1.9. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy.

Prostopadłość**Definicje.**

Proste prostopadłe – proste k i ℓ znajdujące się w przestrzeni są prostopadłe (ozn. $k \perp \ell$), gdy albo leżą w jednej płaszczyźnie i są prostopadłe albo istnieje prosta m równoległa do ℓ współpłaszczyznowa z k i do niej prostopadła.

Prosta prostopadła do płaszczyzny – prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π , gdy jest prostopadła do każdej z prostych zawartych w tej płaszczyźnie.

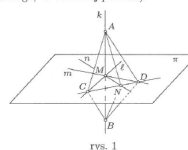
Płaszczyzny prostopadłe – płaszczyzny π_1 i π_2 są prostopadłe, gdy istnieje prosta k zawarta w płaszczyźnie π_1 prostopadła do płaszczyzny π_2 .

Twierdzenie 1.1.

Prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do pewnych dwóch nierównoległych prostych leżących w tej płaszczyźnie.

Dowód

Wystarczy oczywiście dowiedzieć implikację w lewo. Niech M będzie punktem przecięcia się prostej k z płaszczyzną π (rys. 1). Załóżmy, że prosta k jest prostopadła do pewnych dwóch prostych ℓ i m oraz że obie one przechodzą przez punkt M (możemy tak zrobić, bowiem przesunięcie równolegle prostych ℓ i m nie wpływa na ich prostopadłość do prostej k). Wystarczy jeśli udowodnimy, że prosta k jest prostopadła do dowolnej prostej n przechodzącej przez punkt M (z tego samego, co wcześniej powodu).



rys. 1

Niech A i B będą dwoma punktami leżącymi na prostej k po przeciwnych stronach punktu M , takimi, że $AM = BM$. Na prostych ℓ i m wybierzmy w dowolny sposób odpowiednio punkty C i D (różne od M) oraz niech prosta CD przecina prostą n w punkcie N . Z prostopadłości prostej k do prostych ℓ i m

oraz równości $AM = BM$ wnioskujemy, że $AC = BC$ oraz $AD = BD$. W takim razie trójkąty ACD i BCD są przystające. To zaś oznacza, że przystające są także trójkąty ACN i BCN (bok-kąt-bok), skąd $AN = BN$. Trójkąt ANB jest więc równoramienny, zatem jego środkowa MN jest prostopadła do podstawy AB . To pociąga za sobą prostopadłość prostych n i k i kończy dowód twierdzenia.

Zadania dotyczące prostopadłości rozwiązuje się w oparciu o następujący schemat. Załóżmy, że chcemy dowieść, że prosta n jest prostopadła do prostej k . W tym celu musimy najpierw znaleźć dwie nierównoległe proste p i q (leżące w tej samej płaszczyźnie, co prosta k), które są prostopadłe do prostej n . Następnie wystarczy zastosować twierdzenie 1.1.

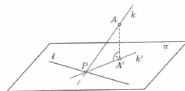
W rozwiązaniach niektórych zadań można zastosować **twierdzenie o trzech prostych prostopadłych**, które sformułujemy poniżej. Jest ono szczególnym przypadkiem opisanego schematu, choć być może nie widać tego na pierwszy rzut oka.

Twierdzenie 1.2. (Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych)

Prosta k przecina płaszczyznę π w punkcie P i nie jest do niej prostopadła. Prosta ℓ należy do płaszczyzny π i przechodzi przez punkt P . Niech k' będzie rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę π . Wówczas prosta ℓ jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej k' .

Dowód

Niech A będzie dowolnym punktem na prostej k różnym od P , zaś A' jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę π . Wówczas punkt A' należy do prostej k' , a prosta AA' jest prostopadła do płaszczyzny π , w szczególności także do prostej ℓ .



rys. 2

Założmy najpierw, że prosta ℓ jest prostopadła do prostej k . Stąd i z prostopadłości ℓ oraz AA' wynika, że prosta ℓ jest prostopadła do płaszczyzny PAA' wyznaczonej przez k i AA' (twierdzenie 1.1). W takim razie dostajemy $\ell \perp k'$.

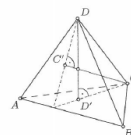
Przyjmijmy teraz, że prosta ℓ jest prostopadła do prostej k' . Stąd i z prostopadłości ℓ i AA' dostajemy prostopadłość ℓ do płaszczyzny PAA' . To prowadzi do wniosku, że $\ell \perp k$.

Powyższy dowód zaprezentował nam także wcześniej opisany schemat. Użyjmy go teraz do rozwiązywania poniższego zadania.

Przykład 1.1.

Udowodnić, że jeśli w czworoboku $ABCD$ wysokości poprowadzone z wierzchołków C i D przecinają się, to krawędzie AB i CD są prostopadłe.

Rozwiązanie



rys. 3

Założmy, że wysokości CC' i DD' danego czworoboku $ABCD$ przecinają się (rys. 3). Skoro prosta CC' jest prostopadła do płaszczyzny ABD , to jest też prostopadła do krawędzi AB . Analogicznie dowodzimy, że prosta DD' jest prostopadła do krawędzi AB . To zaś oznacza, że płaszczyzna wyznaczona przez proste CC' i DD' jest prostopadła do prostej AB (twierdzenie 1.1). W takim razie prosta AB jest prostopadła do dowolnej prostej leżącej w tej płaszczyźnie, a więc w szczególności do prostej CD .