

1	2	3	4	5
A	C	D	B	B

6. $f'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\log_2 10} = \log 2$

7. $3\sqrt{10}$

8. $a_1 + a_2 = 1344$

9. Uzasadnienie.

10. $\angle A_1 = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle B_1 = 180^\circ - 2\beta$, $\angle C_1 = 180^\circ - 2\gamma$

11. $x = 5$

12. 1

13. $p \in (-2, 0) \cup (2, 3)$

14. $A = (2, -10)$, $B = (14, 11)$, $C = (14, -2)$

15. $V = \frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{12}$, $P_b = \frac{a^2 \sqrt{3+12 \operatorname{tg}^2 \alpha}}{4}$

16. a) $P(A) = \frac{1}{8}$, b) $P(B) = \frac{1}{3}$

ZADANIE 1 (1 PKT)

Wartość wielomianu $x^3 + x + 2$ dla argumentu $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ jest równa

- ☒ A) $5\sqrt[3]{4} - 5\sqrt[3]{2}$
 B) $5\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{16}$
 C) $5\sqrt[3]{4} - 5\sqrt[3]{16}$
 D) $5\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{4}$

$$\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{2} (1 + \sqrt[3]{2})$$

$$x^3 + x + 2 = 2(1 - \sqrt[3]{2})^3 + \sqrt[3]{2} - (\sqrt[3]{2})^2 + 2 =$$

$$\cancel{2} - 6\sqrt[3]{2} + 2 \cdot 3 \cdot (\sqrt[3]{2})^2 - \cancel{4} + \sqrt[3]{2} - (\sqrt[3]{2})^2 + \cancel{2} = -5\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{4}$$

ZADANIE 2 (1 PKT)

Liczba $(1 - \sqrt{2})^3$ jest równa

A) $1 - \sqrt{8}$

B) $7 - \sqrt{2}$

C) $7 - 5\sqrt{2}$

D) $-5 + \sqrt{2}$

ZADANIE 3 (1 PKT)

Granica $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-2x^3)^5}{(-3x^5)^3}$ jest równa

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{243}{8}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{32}{27}$

$$\frac{-2^5 \cdot x^{15}}{-3^3 \cdot x^{15}}$$

$$\frac{32}{27}$$

ZADANIE 4 (1 PKT)

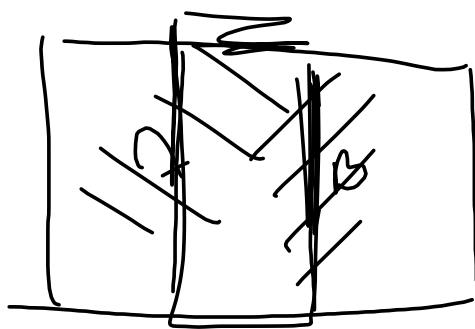
Z pudełka zawierającego losy wygrywające i przegrywające wybieramy dwa losy. Prawdopodobieństwo wylosowania co najmniej jednego losu wygrywającego jest równe $\frac{5}{13}$, a prawdopodobieństwo wybrania co najwyżej jednego losu wygrywającego jest równe $\frac{9}{13}$. Wobec tego prawdopodobieństwo wybrania dokładnie dwóch losów wygrywających jest równe

A) $\frac{12}{13}$

B) $\frac{4}{13}$

C) $\frac{1}{13}$

D) $\frac{11}{13}$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$1 = P(B) + P(A \setminus B)$$

$$1 = \frac{9}{13} + P(A \setminus B)$$

$$P(A \setminus B) = \frac{5}{13}$$

$$A' = \text{WP} \cup \text{WW}$$

$$B = \text{WP} \cup \text{PP}$$

$$A \setminus B = \text{UU}$$

$$A \cup B = \text{W}$$

$$A \cap B = \text{WP}$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B') =$$

ZADANIE 5 (1 PKT)

Odległość między środkami okręgów o równaniach $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 16$ oraz $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$ jest równa

A) $\sqrt{26}$

B) $\sqrt{74}$

C) $\sqrt{2}$

D) $5\sqrt{2}$

$$(4, -3) \quad (-3, 2)$$

$$\sqrt{(-7)^2 + 5^2} = \sqrt{74}$$

ZADANIE 6 (2 PKT)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \log 2^x$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Oblicz pochodną funkcji f w punkcie $x = \sqrt{2}$

$$f(x) = x \cdot \underbrace{\log 2}_{\text{const}}$$

$$\begin{array}{l} f'(x) = \log 2 \\ \hline f'(\sqrt{2}) = \log 2 \end{array}$$

ZADANIE 7 (2 PKT)

W trójkącie kąt między bokami o długościach 6 i $3\sqrt{2}$ jest równy 135° . Jaką długość ma trzeci bok trójkąta?

$$x^2 = 6^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 135 = 3\sqrt{10}$$

ZADANIE 8 (3 PKT)

Ciąg (a_n) jest określony dla $n \geq 1$ i spełnia warunek

$$\underline{3a_{n+3} - a_{n+1} = a_n - 3a_{n+2}} \text{ dla } n \geq 1.$$

Oblicz sumę dwóch początkowych wyrazów ciągu (a_n) jeżeli suma wszystkich jego wyrazów jest równa 2016.

$$a_n + a_{n+1} = 3 \cdot (a_{n+2} + a_{n+3})$$

$$a_{n+2} + a_{n+3} = \frac{1}{3} (a_n + a_{n+1}) \Rightarrow a_3 + a_4 = \frac{1}{3} (a_1 + a_2) = \frac{1}{3} x$$

$$a_5 + a_6 = \frac{1}{3} (a_3 + a_4) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 x$$

$$\underbrace{a_1 + a_2}_{x} + \underbrace{a_3 + a_4}_{\frac{1}{3}x} + \underbrace{a_5 + a_6}_{\left(\frac{1}{3}\right)^2 x} + \dots = 2016$$

$$a_1 = \frac{1}{3} \in (-1, 1) \Rightarrow 2016 = \frac{x}{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot 2016$$

1333

ZADANIE 9 (4 PKT)

Udowodnij, że jeśli liczby dodatnie a i b spełniają warunek $a^2 + b^2 = 23ab$, to $\log_5(a+b) = \log_5 \sqrt{ab} + 1$.

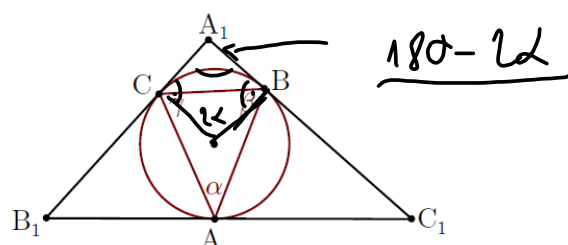
$$Z: a^2 + b^2 = 23ab, \quad a, b \in \mathbb{R}_+$$

$$T: \log_5(a+b) = \log_5 \sqrt{ab} + 1$$

$$D: \begin{aligned} (a+b)^2 &= 25ab & a+b &= 5\sqrt{ab} & C \sim \wedge \\ L_T &= \log_5(a+b) = \log_5 5 + \log_5 \sqrt{ab} = P_T \end{aligned}$$

ZADANIE 10 (4 PKT)

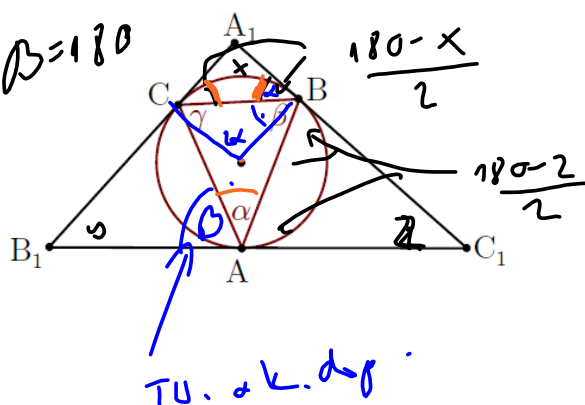
Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są styczne do okręgu w punktach A , B , C , a kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α , β , γ . Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.



ZADANIE 10 (4 PKT)

Boki trójkąta $A_1B_1C_1$ są styczne do okręgu w punktach A , B , C , a kąty trójkąta ABC są odpowiednio równe α , β , γ . Oblicz miary kątów trójkąta $A_1B_1C_1$.

$$\frac{180-\alpha}{2} + \frac{180-\beta}{2} + \beta = 180$$



ZADANIE 11 (4 PKT)

Wyznacz liczbę x tak, aby liczby dodatnie $\log_8(x-1)$, $3\log_8(x-1)$, 6 tworzyły ciąg geometryczny (w podanej kolejności).

$$9 \log_8^2(x-1) = 6 \cdot \log_8(x-1)$$

$$9 \log_8(x-1) \left(\log_8(x-1) - \frac{2}{3} \right) = 0$$

0 ✓
0 0

$$\log_8(x-1) = \frac{2}{3}$$

$$x-1 > 0$$

$$\underline{a_n > 0}$$

$$x-1 = 4$$

$$\underline{x = 5}$$

$$a_3 = 6 \neq a$$

ZADANIE 12 (4 PKT)

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 24, jest taki, który ma największe pole powierzchni bocznej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

$$12a + 6h = 24$$

$$\underline{h + 2a = 4}$$

$$f(a, h) = 6a \cdot h$$

$$f(a) = 6a(4 - 2a) = 12a(2 - a)$$

II

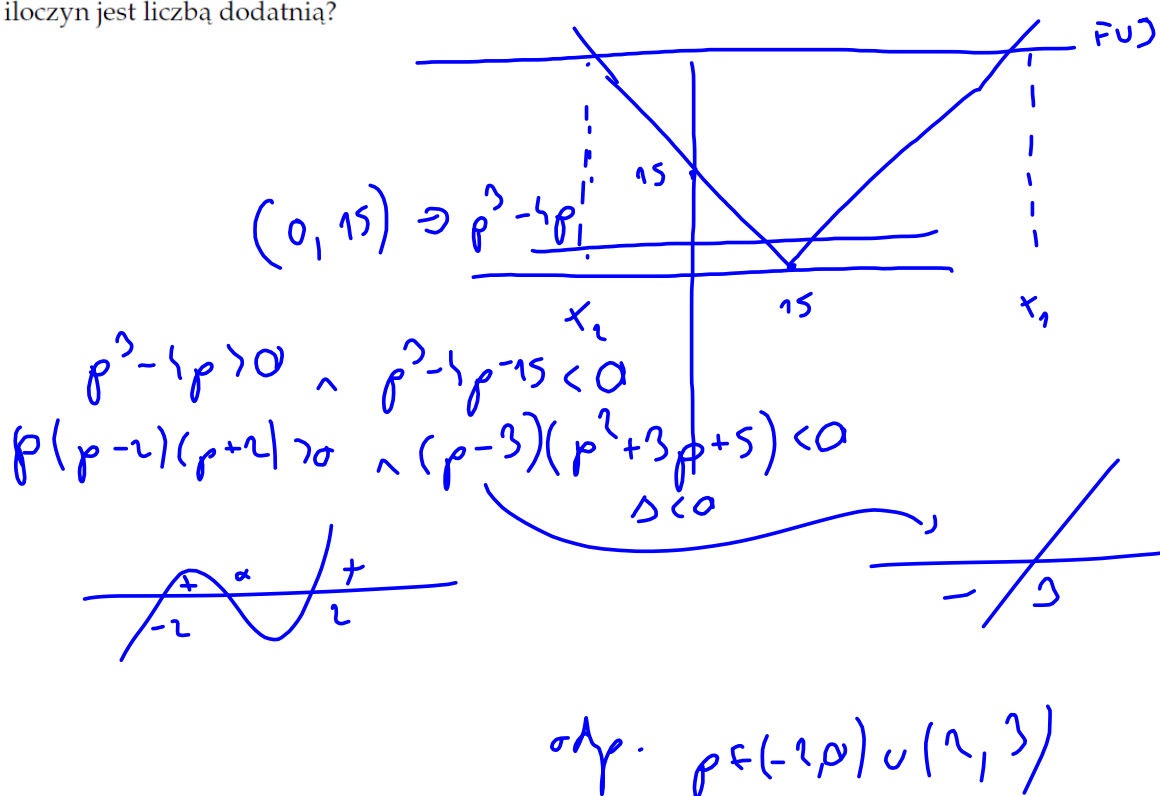
$$\underline{a \in (0, 2)}$$

$$\underline{p = a_0 = 1}$$



ZADANIE 13 (5 PKT)

Dla jakich wartości parametru p równanie $|x - 15| = p^3 - 4p$ ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą dodatnią?



ZADANIE 14 (5 PKT)

Punkt P jest punktem wspólnym przekątnych trapezu $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$ oraz $D = (10, -9)$, $\vec{AB} = [12, 21]$, $\vec{CB} = [0, 13]$, $\vec{CP} = [-3, -2]$. Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków trapezu $ABCD$.

$$\vec{BC} = [0, -13]$$

$$A(x_A, y_A)$$

$$B(x_A + 12, y_A + 21)$$

$$C(x_A + 12, y_A + 8)$$

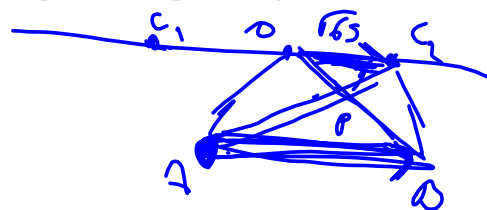
$$P(x_A + 9, y_A + 5)$$

$$|AP| = \sqrt{3^2 + 5^2} = 5\sqrt{10}$$

$$|PC| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

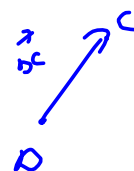
$$A(1, -10)$$

$$D(10, -9)$$



$$\vec{BC} = C - B$$

$$C = B + \vec{BC}$$



$$\vec{DC} = k \cdot \vec{AB} = k \cdot [12, 21]$$

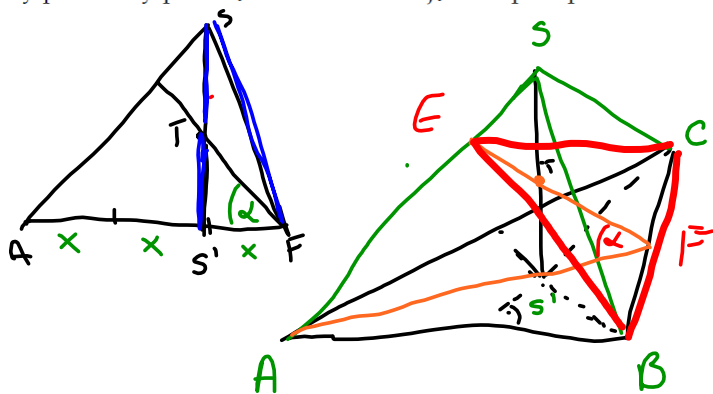
$$k = \frac{|\vec{AD}|}{|\vec{DC}|} = \frac{|\vec{AP}|}{|\vec{PC}|} = \frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{13}} = 5$$

$$\vec{DC} = \frac{1}{5} [12, 21] = [2.4, 4.2]$$

$$\Leftarrow C = (14, -2) \dots$$

ZADANIE 15 (6 PKT)

Ostrosłup prawidłowy trójkątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy długości a i środek wysokości ostrosłupa. Płaszczyzna ta jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa. $x = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Dł. a , α

$$S.P_b = \frac{3}{2} a \cdot h_b \quad h_b = ?$$

$$V = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H \quad H = ?$$

$$\tan \alpha = \frac{H}{2x} \quad H = 2x \cdot \tan \alpha$$

$$\triangle S'FS$$

$$x^2 + H^2 = h^2$$

$$x^2 (1 + 4 \tan^2 \alpha) = h^2$$

$$h_b = x \sqrt{1 + 4 \tan^2 \alpha}$$

ZADANIE 16 (6 pkt)

Rzucamy trzykrotnie symetryczną kostką sześcienną do gry. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

a) A – na każdej kostce wypadnie nieparzysta liczba oczek,

b) B – suma kwadratów liczb wyrzuconych oczek będzie podzielna przez 3.

--- (00) ← 32 "0"
 --- (1111) ← 32 "1"

$$\bar{\Omega} = 6^3 \quad \bar{A} = 3^3 \quad \bar{B} = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$P(A) = \frac{1}{8} \quad P(B) = \frac{2^3 + 4^3}{6^3}$$

