zad 1 D

zad 2 D

zad 3 D

zad 4 B $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-5,0)\cup(7,+\infty)$

$\Downarrow$

$\boxed{x\in\langle -5,-1) \quad f\nearrow}$

zad 5 D 5·5

30 (25) 20 17

30 . 28 . . . 24 20 16

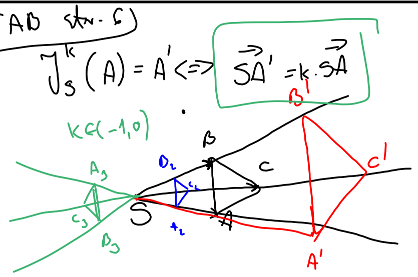
15 . 14 7 14 1

$5S = 11\cdot 5$

$15 = 17\cdot 5$

TAB str. 5)

$J_S^k(A) = A' \Leftrightarrow \boxed{\vec{SA'} = k\cdot\vec{SA}}$



$k>1$

$k\in(0,1)$

$\boxed{\vec{SA'} = k\vec{SA}}$ $\vec{SA} = A-S$ $A = \vec{OA}$ $O(0,0)$

$A'-S = k\cdot(A-S)$

$P'-S = k\cdot(P-S)$

$k = \frac{\vec{SP'}}{\vec{SP}} = \frac{(14,7)}{(8,4)} = \frac{14}{8} = \boxed{\frac{7}{4}}$

---

zad 6) $\log_a b^m = m\log_a b$

$\log_{a^m}(b) = \frac{1}{m}\log_a b$

z def log ok

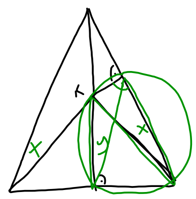
$b = (a^m)^{\frac{1}{m}\log_a b} = a^{\log_a b} = b$

zad 7) $W(-2)=1$, z Tw. Bezouta

$W(x) = (x+2)\cdot Q(x) + 1$

$W(-2) = 1$

$a = \frac{17}{12}$



$T: x=y$

D:

$|\sphericalangle CAK| = |\sphericalangle CBK|$ (bo ∆)

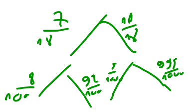
KCBO wpisany w okrąg $|\sphericalangle KCB| + |\sphericalangle KCB|$ $= 180°$

$|\sphericalangle KOB| = |\sphericalangle KOL|$ (bo $\widehat{KL}$) $\Rightarrow T\in 2A \cup 2O$

---

zad 9)

$P(A) = \frac{1159}{1200}$



ZADANIE 10 (3 PKT)

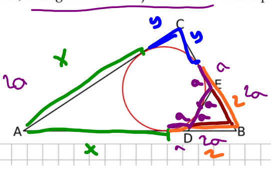
Na bokach AB i BC trójkąta ABC wybrano punkty D i E w ten sposób, że odcinek DE jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz trójkąt DBE jest równoboczny. Obwód trójkąta ABC jest równy 20, a długość boku AC jest równa 7. Oblicz pole trójkąta DBE.

$x+y = 7$

$2x + 2y + 3a + 3a = 20$

$14 + 6a = 20$

$a = 1$



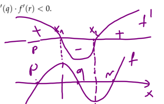
$P_{\Delta DBE} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

ZADANIE 11 (3 PKT)

Funkcja $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ma trzy różne miejsca zerowe: p, q, r. Wykaż, że

$$f'(p) \cdot f'(q) \cdot f'(r) < 0.$$

ISR WIDAĆ



Bez straty ogólności zakładam przyjmuję że: $p<q<r$

$f(p)>0 \wedge f(q)<0 \wedge f(r)>0$

Bez straty ogolności zadania przyjmuję, że p<q<r.

T: $f'(p)\cdot f'(q)\cdot f'(r)<0$

D: $f(x)=(x-p)(x-q)(x-r)$

$f'(x)=1\cdot(x-q)(x-r)+(x-p)\cdot[1\cdot(x-r)+1\cdot(x-q)]$

$f'(x)=(x-q)(x-r)+(x-p)(x-r)+(x-p)(x-q)$

$f'(p)\cdot f'(q)\cdot f'(r)=(p-q)(p-r)(q-p)(q-r)(r-p)(r-q)=$

$-(r-q)^2(r-p)^2(q-p)^2<0$

$(f\cdot g\cdot h)'=f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h'$

ZADANIE 12 (4 PKT)

Oblicz pole trójkąta ograniczonego osią Oy oraz stycznymi do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 7$ poprowadzonymi w punktach $x = 6$ i $x = 8$.

$y=\frac{1}{4}x^2-2x+7$ $\boxed{f'(x)=\frac{1}{2}x-2}$

$L(6,4)$

$K(8,7)$

$a_L: f'(6)=3-2=1$

$a_K: f'(8)=4-2=2$

$l: y=a(x-p)+q$ (p,q) - pkt styczności, $a=f'(x_0)$

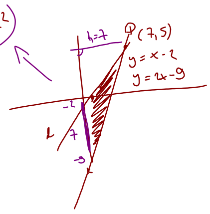
$l: y=1(x-6)+4=x-2$

$k: y=2(x-8)+7=2x-9$

$P \in \begin{cases} y=x-2 \\ y=2x-9 \end{cases}$ $x=7$, $y=5$ $P(7,5)$

odp $P=\frac{1}{2}\cdot 7^2$

$P=24{,}5$



ZADANIE 13 (4 PKT)

Rozwiąż równanie $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

odp. $x\in\left\{0, \frac{2\pi}{3}, 2\pi\right\}$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \vee \quad x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad \vee \quad x=2k\pi$

$x\in\left\{\frac{2\pi}{3}, 0, 2\pi\right\}$

SP II

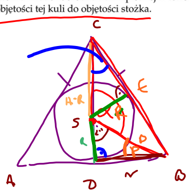
$\cos x+\sqrt{3}\sin x=1 \quad /:2$

$\frac{1}{2}\cos x$

$\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x=\frac{1}{2}$

ZADANIE 14 (5 PKT)

Tworzącą stożka widać ze środka kuli wpisanej w ten stożek pod kątem o mierze α. Wyznacz stosunek objętości tej kuli do objętości stożka.



$\frac{V_k}{V_s}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi r^2\cdot H}=\frac{4R^3}{r^2}\cdot\frac{R}{H}$

$(90°, 180°)$

$2\triangle SDB \Rightarrow \operatorname{ctg}\angle''=\boxed{\frac{R}{r}=-\operatorname{ctg}\alpha}$

$|\angle DBS|=\alpha-90°$

$|\angle SBC|=\alpha-90°$ $\Rightarrow |\angle DCB|=270-2\alpha$

$2\triangle CSE \Rightarrow \sin(270-2\alpha)=\frac{R}{H-R}$

$\frac{H-R}{R}=\frac{1}{\sin}$ $\quad \frac{H}{R}=\frac{1+\sin}{\sin}$

$\frac{H}{R}-1=\frac{1}{\sin}$ $\quad \frac{R}{H}=\frac{\sin(270-2\alpha)}{1+\sin(270-2\alpha)}$

ZADANIE 15 (5 PKT)

Funkcje $f(x) = 2x^6 - ax^4$, $g(x) = 18x^2 + bx + c$ i $h(x) = -6x^4 - 3x^2$ mają tę własność, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$, liczby $f(x)$, $g(x)$ i $h(x)$ tworzą (w pewnej ustalonej kolejności) ciąg geometryczny. Wykaż, że funkcja $f(x) + g(x) + h(x)$ jest rosnąca na przedziale $(0, +\infty)$.

f, h, g - cg g w tej kol. lub
g, h, f

st f = 6 st g = 2 st h = 4 śr.

$h^2=g\cdot f \iff (-6x^4-3x^2)^2=(2x^6-ax^4)(18x^2+bx+c)$

x^8: $36=36$

x^7: $0=2b$ $\Rightarrow \boxed{b=0}$

x^6: $36=2c-18a$

x^4: $9=-ac$

$c-9a=18$

$ac=-9$

$c=18+9a$

$18a+9a^2+9=0$

$\boxed{a=-1}$ $\boxed{c=9}$

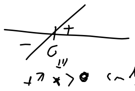
$(f+g+h)(x)=2x^6-5x^4+15x^2+9$

$(f+g+h)'(x)=12x^5-20x^3+30x=2x(6x^4-10x^2+15)$

$\Delta<0$

$12x\left(x^4-\frac{10}{6}x^2+\frac{15}{6}\right)=$

$12x\left((x^2-\dots)^2+\dots\right)>0$



$(0; \ldots)$

$9, 0, 0 \iff 0^2=0\cdot 9$

$0, 0, 9 \Rightarrow 0^2=0\cdot 9$

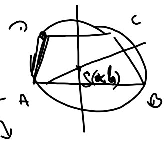
Z: $a b c \neq 0$

$\boxed{a, b, c - \text{cg geom} \iff b^2=a\cdot c}$

ZADANIE 16 (4 PKT)

Napisz równanie okręgu opisanego na trapezie równoramiennym $ABCD$, jeżeli $A = (3, 12)$, $B = (-14, 19)$, $C = (-21, 12)$ i $D = (-14, -5)$.

$$\begin{cases} |AS|^2 = |BS|^2 \\ |BS|^2 = |CS|^2 \end{cases}$$



$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$A(3,12)$: $(3-a)^2 + (12-b)^2 = r^2$

$B(-14;19)$: $(-14-a)^2 + (19-b)^2 = r^2$

$C(-21,12)$: $(-21-a)^2 + (12-b)^2 = r^2$

A−B: $(3-a)^2 - (14+a)^2 + (12-b)^2 - (19-b)^2 = 0$

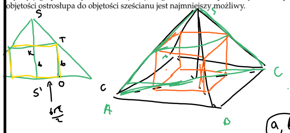
A−C: $(3-a)^2 - (21+a)^2 + \cancel{(12-b)^2} - \cancel{(12-b)^2} = 0$

$\boxed{a = -9,\ b = 7}$ → $r = 13$

$$\boxed{(x+9)^2 + (y-7)^2 = 13^2}$$

ZADANIE 17 (7 PKT)

W ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości H wpisano sześcian tak, że cztery jego wierzchołki należą do krawędzi bocznych ostrosłupa, a cztery pozostałe należą do płaszczyzny jego podstawy. Oblicz dla jakiej długości krawędzi podstawy ostrosłupa stosunek objętości ostrosłupa do objętości sześcianu jest najmniejszy możliwy.



D: H

$$\frac{V_o}{V_s} = \frac{\frac{1}{3}a^2 \cdot H}{b^3}$$

(a, b, H)? b(a) ? a(b) ?

$\triangle SKT \sim \triangle SS'C \sim \triangle TOC$

$$\frac{H}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{b}{(a-b)\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$ab = aH - bH$

$b(a+H) = aH$

$b = \frac{aH}{a+H}$

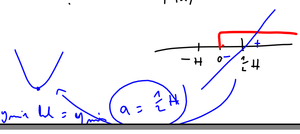
D: $a \in \mathbb{R}_+$

$$f(a) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 H (a+H)^3}{a^3 H^3} = \frac{1}{3H} \cdot \frac{(a+H)^3}{a}$$

$$f'(a) = \frac{1}{3H} \cdot \frac{3(a+H)^2 \cdot 1 \cdot a - (a+H)^3}{a^2} = \frac{1}{3H} \cdot \frac{(a+H)^2(3a - a - H)}{a^2} =$$

$$f'(a) = \frac{1}{3H} \cdot \frac{(a+H)^2(2a-H)}{a^2}$$

$f'(a) > 0$



y_{min} dla $= y_{min}$ ... $a = \frac{1}{2}H$