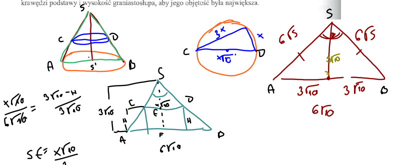
585.* Dany jest stożek o promieniu podstawy $3\sqrt{10}$, którego przekrój osiowy jest trójkątem prostokątnym. W stożek ten wpisano graniastosłup prosty mający w podstawie trójkąt prostokątny, w którym stosunek długości przyprostokątnych jest równy 3 : 1. Jedna podstawa graniastosłupa zawiera się w podstawie stożka, a wierzchołki drugiej podstawy należą do pobocznicy stożka. Zbadaj, jakie powinny być długości krawędzi podstawy i wysokość graniastosłupa, aby jego objętość była największa.



$\frac{x\sqrt{10}}{6\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}-H}{3\sqrt{10}}$

$\boxed{H = 3\sqrt{10} - \frac{x\sqrt{10}}{2}}$

$V = P_p \cdot H = \frac{3}{2}x^2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}(6-x) = \frac{3\sqrt{10}}{4}(-x^3+6x^2)$

$V(x) = \frac{3\sqrt{10}}{4}(-x^3+6x^2)$ D: $x \in (0,6)$

$V'(x) = \frac{3\sqrt{10}}{4}(-3x^2+12x)$

x	$(0,4)$	4	$(4,6)$
f'	+	0	−
f	↗		↘

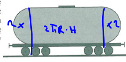
⇒ y_{max} dla $x=4$ $H=\sqrt{10}$

odp. $4\times12\times4\sqrt{10}\times\sqrt{10}$

574. Cysterna kolejowa do przewozu chemikaliów składa się z trzech części: części środkowej w kształcie walca oraz dwóch części w kształcie półkul, zamykających z obu stron część środkową. Część walcową cysterny wykonuje się z pojedynczej warstwy blachy, a części półkuliste z warstw podwójnych. Objętość cysterny ma być równa 18π m³.

a) Zbadaj, jaka powinna być średnica i długość cysterny, aby na jej wykonanie zużyć jak najmniej materiału.

b) Wiadomo, że 1 m² blachy kosztuje 500 zł. Oblicz, ile wynosi koszt materiału potrzebnego do wykonania tej cysterny?



$R \in \left(0, \frac{3\sqrt[3]{5}}{2}\right)$

$V = V_k + V_w = 18\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi R^2 \cdot H$

$54 = 4R^3 + 3R^2H$ $HR = \frac{54-4R^3}{3R}$ $R^3 < \frac{27}{2}$

$P_c = 4\pi R^2 \cdot 2 + 2\pi R \cdot H$ $P_c(R) = 8\pi R^2 + 2\pi \cdot \frac{54-4R^3}{3R}$

$P_c'(R) = \frac{32\pi R^3 - 108\pi}{3R^2}$ $P'(R) = 0 \Leftrightarrow R = \frac{3}{2}$

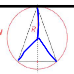
R	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt[3]{5}}{2}\right)$
P'	−	0	+
P	↘		↗

minimum dla $R = \frac{3}{2}$

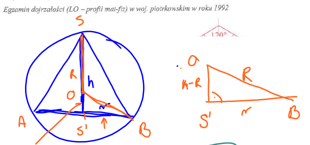
$P_c\left(\frac{3}{2}\right) = 180$

578.* W kulę o promieniu R wpisano stożek o największej możliwej objętości. Wyznacz wysokość tego stożka.

Egzamin dojrzałości (LO – profil mat-fiz) w woj. piotrkowskim w roku 1992



Przekrój osiowy brył



D: R

z $\triangle OBS'$

$(h-R)^2 + r^2 = R^2$

$h^2 - 2hR + R^2 + r^2 = R^2$

$r^2 = 2hR - h^2$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

$V(h) = \frac{1}{3}\pi h(2hR - h^2)$ D: $h \in (0, 2R)$

$V'(h) = \frac{\pi}{3}(2Rh^2 - h^3)' = \frac{\pi}{3}(4Rh - 3h^2)$

$V'(h) = -\pi h\left(h - \frac{4}{3}R\right)$

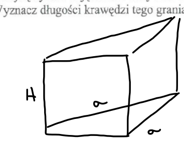
h	$\left(0, \frac{4}{3}R\right)$	$\frac{4}{3}R$	$\left(\frac{4}{3}R, 2R\right)$
V'	+	0	−
V	↗		↘

$V(h) = \frac{1}{3}\pi h(2hR - h^2) = \frac{1}{3}\pi 2h^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi h^3$

$V'(h) = \frac{4}{3}\pi Rh - \pi h^2$

565. Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej 2 m³ istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.

CKE, matura – poziom rozszerzony, maj 2006



$a = 2$
$H = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$ $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = 2$

$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3\frac{8}{a\sqrt{3}}$ $H = \frac{8}{a^2\sqrt{3}}$

$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2 + \frac{16}{a}\right)$ D: $a \in (0, \infty)$

$P_c' = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2a - \frac{16}{a^2}\right) = \frac{\sqrt{3}a^3 - 8\sqrt{3}}{a^2}$

$P_c' = \frac{a^3\sqrt{3} - 8\sqrt{3}}{a^2}$, $a^2 > 0$

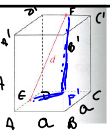
$P_c' = 0 \Leftrightarrow (a^3 - 8) = 0$

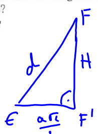
$a = 2$

x	$(0,2)$	2	$(2, +\infty)$
P'	−	0	+
P	↘	min	↗

566. Odcinek łączący środki dwóch skośnych krawędzi podstaw graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d. Jaką wysokość powinien mieć ten graniastosłup, aby pole jego powierzchni bocznej było maksymalne?

Egzamin dojrzałości (LO – profil podstawowy) w woj. opolskim w roku 1992





$P_b = 4aH$ $d^2 = H^2 + \frac{a^2}{2}$

$a^2 = 2d^2 - 2H^2$

$P_b = 4H\sqrt{2d^2 - 2H^2}$ $a = \sqrt{2d^2 - 2H^2}$

max?

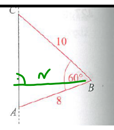
$P_b = 4\sqrt{2d^2H^2 - 2H^4}$ $f'(H) = -8H^3 + 4d^2H = -8H\left(H^2 - \frac{1}{2}d^2\right)$

D: $H \in (0, d)$ $f'(H) = -8H\left(H - \frac{\sqrt{2}}{2}d\right)\left(H + \frac{\sqrt{2}}{2}d\right)$

f_{max} dla $H = \frac{\sqrt{2}}{2}d$

H	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}d\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}d$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}d, d\right)$
	+		−
	↗		↘

438. W trójkącie ABC $|AB| = 8$, $|BC| = 10$, zaś $|\angle ABC| = 60°$. Oblicz objętość i pole powierzchni bryły powstałej z obrotu trójkąta ABC dookoła prostej zawierającej bok AC.



$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}P_p \cdot H_1 + \frac{1}{3}P_p \cdot H_2 =$

$\frac{1}{3}P_p(H_1 + H_2) = \frac{1}{3}P_p \cdot AC$ $P_p = \pi r^2$

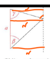
$AC^2 = 164 - 160 \cdot \frac{1}{2} = 84$ $AC = 2\sqrt{21}$

$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2} 4\sqrt{21} \cdot r \cdot \cancel{2}$

$20\sqrt{3} = \sqrt{21} \cdot r$

$r = \frac{20}{\sqrt{7}}$ $P_p = \frac{\pi \cdot 400}{7}$

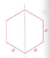


441. Trójkąt o boku a i kątach ostrych do niego przyległych o miarach β i γ obraca się dookoła prostej równoległej do tego boku, poprowadzonej przez wierzchołek przeciwległego kąta. Oblicz objętość powstałej bryły.

$V = 2\pi r \cdot P_\Delta$

442. Oblicz pola powierzchni brył obrotowych otrzymanych przez obrót sześciokąta foremnego o boku a wokół

a) prostej przechodzącej przez środki przeciwległych boków sześciokąta;
b) prostej zawierającej dłuższą przekątną sześciokąta (zobacz rysunek);
c) prostej zawierającej bok sześciokąta.



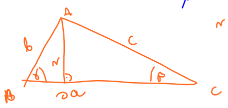
443. W trapezie równoramiennym $ABCD$ podstawa CD ma długość 1, kąt ABC ma miarę $60°$, a przekątna AC jest prostopadła do boku BC. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu trapezu wokół boku BC.

Egzamin dojrzałości (LO – profil podstawowy) w woj. łomżyńskim w roku 1994

$$V = V_w - (V_{sg} + V_{sd}) = \pi r^2 a - \left(\frac{1}{3}\pi r^2 a_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 a_2\right) =$$

$$\pi\left(r^2 a - \frac{1}{3} r^2 a\right) = \underline{\frac{2}{3}\pi r^2 \cdot a} = \frac{2}{3}\pi \frac{\sin^2\beta \sin^2\gamma\, a^3}{\sin^2(\beta+\gamma)}$$

$r(a, \gamma, \beta)$



ΔABC

$$\Downarrow \quad \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\beta+\gamma)}$$

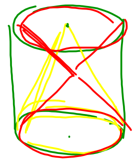
$2\Delta ADB$

$$\frac{r}{b} = \sin\gamma \qquad b = \frac{r}{\sin\gamma}$$

$$\frac{r}{\sin\gamma\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\beta+\gamma)}$$

$$\boxed{r = \frac{a\sin\gamma\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}}$$

$$P = 2\pi r \cdot P_\Delta = 2\pi \frac{a\sin\gamma\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sin\gamma\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$$



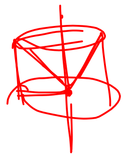
$$V_s = \frac{1}{3} V_w$$

$$V_w - V_s = \frac{2}{3} V_w = 2V_s$$

$$V_{s_1} + V_{s_2} = \frac{1}{3}\pi r^2 \underbrace{(h_1 + h_2)}_{h}$$

$\underline{P_1 = \frac{1}{2} r h}$

$\underline{V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h}$



$\frac{1}{3} P_p H$