

Zadanie 156.
Dana jest funkcja

$$f(x) = (k-2)x^2 + (2-2k)x + k - 2.$$

Wykaż, że każda styczna do wykresu funkcji f w punkcie $A = (1, a)$ i również w punkcie $B = (-1, b)$ przechodzi przez początek układu współrzędnych.

355. (0–6) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD S$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC| : |AS| = 6 : 5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.
CKE, matury – poziom rozszerzony, maj 2011

345.* R Podstawa graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym α . Krótsza przekątna graniastosłupa ma długość d i tworzy ze ścianą boczno kąt β . Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 256.
Ze zbioru

$$Z = \{x : x \in \mathbb{C} \wedge 3 \cdot 9^x - 82 \cdot 3^x + 27 \leq 0\}$$

losujemy bez zwracania liczby a , b i c , a następnie tworzymy funkcję f postaci

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Oblicz prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

- A – otrzymana funkcja jest parzysta,
- B – otrzymana funkcja jest malejąca,
- C – wykres funkcji przechodzi przez punkt $(0, 2)$ i funkcja f osiąga minimum.

[illegible]

15. * K. Położona graniastoza jest rumb o kacie osiym α . Krotna przelazna graniastoza ma dlugosci d i tworzy ze szcian boczna klatke. Wyznacz oblodoki tego graniastoza.

$V = a^3 \sin^2 \frac{H}{2}$
 $V = \frac{1}{6} d_1 d_2 d_3$

Dani:
 α, p, d

$2\sqrt{3} \cos \alpha$
 $\sin \varphi = \frac{kp}{d} \Rightarrow$
 $k/p = 4 \sin \varphi$

$2 \Delta KBC \Rightarrow$
 $\sin \angle = \frac{k/p}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{d \sin p}{\sin \angle}$

$2 \Delta ADB \Rightarrow DB^2 = 2a^2(1 - \cos \angle)$
 $2 \Delta DOB \Rightarrow HA^2 = a^2 - DO^2 = a^2 - 2a^2(1 - \cos \angle)$

$V = \sin \angle \cdot \frac{A^3 \sin^3 p}{\sin^3 \angle} \cdot \sqrt{1 - \frac{A^3 \sin^3 p}{\sin^3 \angle} (1 - \cos \angle)} =$
 $V = \frac{A^3 \sin^3 p}{\sin \angle} \cdot \sqrt{1 - \frac{1 - \cos \angle}{\cos^3 \angle} (1 - \cos \angle)}$
 $(1 - \cos \angle)$
 $\sin^2 \angle = 1 - \cos^2 \angle$
 $(1 - \cos \angle)(1 + \cos \angle)$

855. (0-6) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCD$ o podstawie $ABCD$. W trójkącie równoramiennym ASC stosunek długości podstawy do długości ramienia jest równy $|AC| : |AS| = 6 : 5$. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

CKE, matematyka – poziom rozszerzony, maj 2011

sin $\alpha = \frac{4}{5\sqrt{2}}$

$SJ = \sqrt{5x^2 - \frac{9}{4}x^2}$

$SJ = \frac{1}{2} \sqrt{11}x$

Zadanie 15b.
Dana jest funkcja

$$f(x) = (k-2)x^2 + (2-2k)x + k - 2.$$

Wykaż, że każda styczna do wykresu funkcji f w punkcie $A = (1, a)$ i również w punkcie $B = (-1, b)$ przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Handwritten solution:

$$\begin{aligned} f(1) &= a & f(-1) &= b \\ f(1) &= 2k - 2 = a & f(-1) &= 4k - 6 = b \\ A(1, 2) & \text{ i } B(-1, 4k - 6) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2(k-1)x + 2 - 2k$$

$$f'(1) = 2k - 4 + 2 - 2k = -2 \quad f'(-1) = -4k + 6$$

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1) - 2 & y &= (-4k+6)(x+1) + 4k-6 \\ y &= -2x & y &= (-4k+6)(x+1-1) \\ & \text{ c.m.A} & y &= (-4k+6)x \geq (0,0) \\ & & & \text{ c.m.A} \end{aligned}$$

Zadanie 159.

Z punktu C należącego do prostej o równaniu $y = 2$ poprowadzono dwie proste, które są styczne w punktach A i B do paraboli $f(x) = -0,25x^2 + x$. Wykaż, że proste AC i BC są prostopadłe.

357. W Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego mając długość krawędzi podstawy a i miarę 2α kąta między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi.

334. R Ze środka ściany sześciennego o krawędzi a poprowadzono prostą prostopadłą do przekątnej sześciennego. Oblicz długości odcinków, na jakie ta prostopadła podzieliła przekątną sześciennego.

Zadanie 259.

Dany jest zbiór $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, gdzie $n \geq 3$.

- Ze zbioru X losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że pierwsza z wylosowanych liczb jest mniejsza od drugiej.
- Zbiór X dzielimy losowo na dwa niepuste podzbiory. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczby 1 i n będą w tym samym podziorze.

Zadanie 164.

Punkty A i B są punktami wspólnymi dodatnich półosi prostokątnego układu współrzędnych XOY i prostej l przechodzącej przez punkt $P = (p, 2p)$.

a) Wyznacz równanie prostej l wiedząc, że pole trójkąta AOB jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

b) Wyznacz stosunek $\frac{P_1}{P_2}$, gdzie P_1 jest najmniejszym polem trójkąta AOB obliczonym w punkcie a), zaś P_2 oznacza maksymalne pole prostokąta $MONQ$ wpisanego w trójkąt AOB .

361. R Odległość środka podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego od ściany bocznej jest równa d , a kąt ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α . Oblicz objętość ostrosłupa.

336. Krawędź podstawy graniastoslupa prawidłowego sześciokątnego ma długość a . Najdłuższa przekątna graniastoslupa jest cztery razy dłuższa od najkrótszej przekątnej podstawy. Oblicz objętość graniastoslupa.

**Zadanie 260.**

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n\}$ losujemy dwa razy ze zwracaniem po jednej liczbie. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą należy do przedziału $(1; 2)$.

Zadanie 172.

Z wierzchołka paraboli o równaniu $y^2 = 2px$ poprowadzono dwie wzajemnie prostopadłe proste zawierające cięciwy paraboli i przecinające tę krzywą w punktach A i B . Wyznacz równanie zbioru wszystkich środków odcinków AB .

68. R Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe S , a miara kąta między wysokościami dwóch ścian bocznych poprowadzonymi z wierzchołka ostrosłupa jest równa 2α . Oblicz objętość ostrosłupa.

404. Sześcienn o krawędzi długości 3 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i tworzącą z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 60° . Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zadanie 263.

Z urny, w której znajduje się n kul ponumerowanych od 1 do n losujemy kolejno bez zwracania k kul, gdzie $k \leq n$, i z ich numerów tworzymy zgodnie z kolejnością losowania ciąg k -wyrazowy. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania ciągu monotonicznego, którego jednym z wyrazów jest liczba k ?