

$$124. \frac{\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2-\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[3]{a^2-2\sqrt[3]{ax}\sqrt[3]{a^2}} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}} \cdot \sqrt[3]{x} = \quad ? : \dots\dots\dots$$

$$34. \frac{2(2b)^{\frac{3}{2}}(a+2b)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a-2b}} \cdot \frac{\sqrt{2b}\sqrt{2ab} + \sqrt{2ab}}{\sqrt{2ab}} - \frac{8b^{\frac{3}{2}}}{(6a-48b) - \frac{3a}{3a-6b} - \frac{8b^{\frac{3}{2}}}{a^2-16ab+16b^2}} =$$

$$\frac{2^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}}{(a+16b)(a^2-16b^2)} \cdot \frac{16a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}ab^{\frac{3}{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}(a+16b)(a+16b)}$$

$$\frac{2^{\frac{3}{2}}ab}{a^2-16b^2}$$

$$-6 \left(\frac{a}{6a-48b} - \frac{2b}{3(a-16b)} - \frac{8b^{\frac{3}{2}}}{(a-16b)(a-8b)} \right) = \frac{(a-8b)(a+2b)}{(a-8b)(a-16b)}$$

$$-6 \frac{a \cdot a - 16a - 4ab + 31b^2 - 48b^{\frac{3}{2}}}{8(a-8b)(a-16b)} = \frac{a^2 - 16ab - 16b^2}{(a-16b)(a-16b)} =$$

$$= \frac{a+16}{a-16}$$

$$\frac{4ab}{(a-16)(a+16)} - \frac{a+16}{(a-16)} = \frac{4ab - (a+16)(a+16)}{(a-16)(a+16)} = \frac{-a^2 - 4b^2}{a^2 - 16b^2}$$

[illegible]

Zadanie 5. (3 pkt) CKE

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1} + \sqrt{2^{50}-1} < 2^{26}$.

$$\underbrace{(2^{50}+1)^{\frac{1}{2}} + (2^{50}-1)^{\frac{1}{2}}}_{\downarrow} \leq \underbrace{2^{26}}_{\downarrow} \quad | ()^{\frac{1}{2}}$$
$$2^{50}+1 + 2\sqrt{(2^{50}+1)(2^{50}-1)} + 2^{50}-1 < 2^{52}$$
$$\underbrace{2 \cdot 2^{50} + 2\sqrt{\quad}}_{\downarrow} < \underbrace{2^{52}}_{\downarrow} \quad | : 2$$
$$\sqrt{2^{100}-1} < 2^{50}$$
$$2^{100}-1 < 2^{100} \quad \text{OK}$$
$$(102)^{100}-1 < 102^{100}$$

ostatnia nierówność jest prawdziwa, zatem wszystkie wcześniejsze są prawdziwe, czyli teza została udowodniona. CND.

Zadanie 1
Oblicz wartość wyrażenia: $\log_3 3 \cdot \log_3 12 + \log_3^2 2$.

Zadanie 2
Liczbę $\frac{x^2 - y^2}{x - y}$ przedstaw w postaci potęgi o wykładniku $-\frac{1}{2}$.

Zadanie 3
Oblicz wartość wyrażenia $u(x) = \frac{x+3+\sqrt{x^2-9}}{x+3+\sqrt{x^2-9}} + \frac{x+3-\sqrt{x^2-9}}{x+3+\sqrt{x^2-9}}$ dla $x = 2015$.

Zadanie 4
Rozstrzygnij, czy $a = \sqrt[3]{9\sqrt{3}} + 11\sqrt{2} - \sqrt[3]{11\sqrt{2} - 9\sqrt{3}}$ jest liczbą wymierną.

Zadanie 5
Oblicz sumę $\frac{2^0 - 1}{2^1 + 1} + \frac{3^0 - 1}{3^2 + 1} + \frac{4^0 - 1}{4^3 + 1} + \dots + \dots + \frac{2015^0 - 2015^2}{2015^3 + 1}$.

Zadanie 6
Zapisz w możliwie najprostszej postaci liczbę $a = \sqrt{19^3 - 100 \cdot 19 \cdot 81 + 3^{12}}$. Nie używaj kalkulatora.

Zadanie 7
Znaczyć na osi liczbowej zbiór opisany nierównością: $|x^2 - 9| - |7x - 21| < 0$.

Zadanie 8
Porównaj liczbę $a = \sqrt[3]{25^{\frac{1}{3}} + 40^{\frac{1}{3}}}$ oraz $b = 3^{\frac{1}{3} \log_3 2 - \log_3 2} \cdot \log_3 \sqrt[3]{6}$.

Zadanie 9
Rozstrzygnij, która z liczb $a = \sqrt{3 + 2\sqrt{3-1}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{3-1}}$ czy $b = 2 \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5-13}} + \sqrt{48}$ jest mniejsza.

Zadanie 10
Usuń niewymierność z mianownika liczby $\frac{1}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{30} + \sqrt[3]{25}}$.

Zadanie 11
Zapisz w postaci potęgi liczby $\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{3})^{\sqrt{3}} \cdot (81 - 181 + 501) \cdot 21$.

Zadanie 12
Przedstaw w zapisie wykładniczym liczbę $\frac{3 \cdot 10^{10} - 4 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^9 - 1 \cdot 10^{10}}$.

Zadanie 13
Oblicz, o ile procent liczba $a = \frac{10 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{25}}$ jest mniejsza od liczby $b = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Zadanie 14
Wyznacz te wartości a oraz b , dla których zachodzi równość $\log(a+b) = \log a + \log b$.

Zadanie 15
Wyznacz maksymalne n , dla którego 2^n jest dzielnikiem liczby 20!

Zadanie 16
Reszta z dzielenia liczby 4627 przez pewną liczbę n wynosi 7. Jeśli przez tę samą liczbę n podzielimy 2753, to jako resztę otrzymamy 23. Wyznacz n .

Zadanie 17
Oblicz sumę $s = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + \dots + 2013^2 - 2014^2 + 2015^2$.

Zadanie 18
Rozstrzygnij, która z liczb jest większa: $2^{100} - 3^{86}$, czy $2^{96} + 3^{87}$.

Zadanie 19
Reszta z dzielenia liczby naturalnej n przez 7 wynosi 3, a z dzielenia tej liczby przez 8 jest równa 2. Wyznacz resztę z dzielenia n przez 56.

Zadanie 20
Wiedząc, że $\log_2 125 = a$, oblicz wartości wyrażenia $w = \frac{\log_2 27 - \log_2 25}{\log_2 \sin 54^\circ - \log_2 \cos 72^\circ}$.

Wykaż, że

Zadanie 21
Udowodnij, że $\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_2 4} + \frac{1}{\log_2 5} < -2$.

Zadanie 22
Wykaż, że liczba $2^{15} + 3^{24} + 4^{22} + 5^{37}$ jest podzielna przez 10.

Zadanie 23
Uzasadnij, że zachodzi równość $\frac{1000}{1001} = \frac{1000000}{1001001}$.

Zadanie 24
Wykaż, że $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}} \geq \sqrt{2015}$.

Zadanie 25
Udowodnij, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|x+y-z| + |y+z-x| + |z+x-y| \geq |x| + |y| + |z|$.

Zadanie 26
Wykaż, że $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2011 \cdot 2013}} + \frac{1}{\sqrt{2013 \cdot 2015}} = \frac{1007}{2015}$.

Zadanie 27
Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n zachodzi nierówność $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{4n+1} < \frac{1}{2}$.

Zadanie 28
Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $a > 1$ i dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt[n]{a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^{n+1}} - \sqrt[n]{a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^n} > 0$.

Zadanie 29
Uzasadnij, że dla dwóch liczb rzeczywistych a i b , jeśli tylko są tego samego znaku, prawdziwa jest nierówność $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Zadanie 30
Udowodnij, że $(1+a)^n + (1+\frac{1}{a})^n \geq 2^{n+1}$ dla każdego $a \in \mathbb{R}_+$ i każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 1
Sprawdź, czy liczba $2^{231} + 3^{231}$ jest podzielna przez 35. Skorzystaj z twierdzenia: $(x+y)|(x^n+y^n)$ dla nieparzystego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 2
Jak zmieni się logarytm przy podstawie 6 z iloczynu trzech dodatnich liczb, jeżeli jedną z nich zwiększymy o 33%, drugą zwiększymy o 112,5%, a trzecią zmniejszymy 17 razy?

Zastanów się

Zadanie 6.

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$. Udowodnij, że jeżeli $a > 0, b > 0$ i $c > 0$, to

$$f(a+b) + f(a+c) + f(b+c) \leq f(2a) + f(2b) + f(2c).$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} - \frac{1}{2c} \geq 0 \Leftrightarrow T$$

$$T = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} - \frac{1}{2c} = \frac{b(a+b) + a(a+b) - 4ab}{4ab(a+b)} = \frac{b^2 + a^2 + ab - 4ab}{4ab(a+b)} = \frac{b^2 + a^2 - 3ab}{4ab(a+b)}$$

$$+ \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} - \frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} - \frac{1}{2c} = \frac{(a-c)^2}{4ac(a+c)} + \frac{(b-c)^2}{4bc(b+c)} \geq 0$$

Zadanie 7.
Udowodnij, że wyrażenie $\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x}$ gdzie x, y, z są długościami boków trójkąta, jest mniejsze od $\frac{1}{8}$.
Czy założenie, że x, y, z są długościami boków trójkąta, jest w tym zadaniu istotne?

$\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} = \frac{(x-y)(y+z) + (y-z)(z+x) + (z-x)(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$= \frac{x^2y - x^2z + y^2x - y^2z + z^2x - z^2y}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$= \frac{z(y-x)(y+x) + x(y-z)(y+z) + y(z-x)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$= \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$W(x) = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ $\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}$ $\frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx}$

$x+y \geq 2\sqrt{xy}$ $y+z \geq 2\sqrt{yz}$ $z+x \geq 2\sqrt{zx}$

$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{2\sqrt{xy}}$ $\frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}}$ $\frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{2\sqrt{zx}}$

$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{2\sqrt{xy}} + \frac{1}{2\sqrt{yz}} + \frac{1}{2\sqrt{zx}}$