

[illegible]

Rozwiąż równanie

$$x^3 + 4x^2 + 8x + \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x} = 70.$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}$$

Rozwiąż równanie

$$x^3 + 4x^2 + 8x + \frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x} = 70.$$

$$f(k) = x^k + x^{-k}$$

$$f(3) + 4f(2) + 8f(1) = 70$$

$$T = f(x) = x + \frac{1}{x}, \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$\begin{aligned} T^2 &= f(2) + 2 \\ T^3 &= f(3) + 3f(1) \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} \text{Ex } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= \underbrace{x^2 + \frac{1}{x^2}}_{f(2)} + 2 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 &= f(3) + 3 \end{aligned} \right)$$

$$T^3 = 4(3) + 3(1) = 4(9) + 3T \Rightarrow 4(3) = T^3 - 3T$$

$$\textcircled{4} = T^3 - 3T + 4 \cdot T^2 - 8 + 8T = 70$$

$$T^3 + 4T^2 + 5T - 78 = 0$$

$$(T-3)(T^2+7T+26)=0$$

$$T = 3$$

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 1 = 8$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$f(x) = \left| -\frac{2}{3-|x|} \right| + 2 = \left| \frac{2}{|x|-3} \right| + 2$$

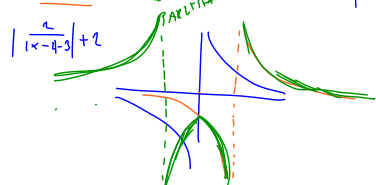
$$\frac{2}{x} \rightarrow \frac{2}{3+x} \rightarrow \frac{2}{3-x} \rightarrow \frac{2}{3-|x|} \rightarrow$$

$$y = \sin 2x \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3-|x+2|} \rightarrow \frac{1}{3+x+1} \rightarrow -\frac{2}{3-|x+1|}$$

$$\rightarrow \left| -\frac{2}{\dots} \right| \rightarrow | \quad | + 2$$

$$= \left| \frac{2}{|x-2|-3} \right| + 2$$

$$\frac{2}{x} \rightarrow \frac{2}{x-3} \rightarrow \frac{2}{|x-3|} \rightarrow \frac{2}{|x-2|-3} \rightarrow \left| \frac{2}{|x-2|-3} \right| \rightarrow$$



Dane jest równanie

$$mx^2 - (m-3)x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad (x+1)^2 = 0$$

o niewiadomej x .

- b) Dla jakich całkowitych wartości parametru m iloczyn dwóch różnych rozwiązań danego równania jest liczbą całkowitą?

$$m \in \mathbb{Z}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$$

$$m \in \{-1, 1\} \quad \begin{matrix} m=0 \\ \downarrow \\ \textcircled{1} \end{matrix}$$

$\Delta > 0$
 $(k+1)^2 - 4(k-2)(-4) > 0$
 $5k^2 - 6k + 4 > 0$
 $\Delta = 36 - 80 < 0$
 $k \in (-\infty, \frac{1}{5}) \cup (1+\infty)$

$|x_1 - x_2| < 1 \iff (x_1 - x_2)^2 < 1$
 $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 1$
 $x_1 + x_2 = \frac{k+1}{k-2}$
 $x_1x_2 = \frac{k}{k-2}$
 $\left(\frac{k+1}{k-2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{k}{k-2} < 1$
 $\frac{k^2 + 2k + 1}{(k-2)^2} - \frac{2k}{k-2} < 1$
 $\frac{k^2 + 2k + 1 - 2k(k-2)}{(k-2)^2} < 1$
 $\frac{k^2 + 2k + 1 - 2k^2 + 4k}{(k-2)^2} < 1$
 $\frac{-k^2 + 6k + 1}{(k-2)^2} < 1$
 $-k^2 + 6k + 1 < (k-2)^2$
 $-k^2 + 6k + 1 < k^2 - 4k + 4$
 $-2k^2 + 10k - 3 < 0$
 $2k^2 - 10k + 3 > 0$
 $\Delta = 100 - 24 = 76$
 $k_1 = \frac{10 - \sqrt{76}}{4} \approx 0.3$
 $k_2 = \frac{10 + \sqrt{76}}{4} \approx 1.7$
 $k \in (-\infty, 0.3) \cup (1.7, \infty)$

$\Delta > 0$
 $(m-2)^2 - 4m > 0$
 $m^2 - 6m + 4 > 0$
 $\Delta = 36 - 16 = 20$
 $m_1 = \frac{6 - \sqrt{20}}{2} \approx 0.8$
 $m_2 = \frac{6 + \sqrt{20}}{2} \approx 5.2$
 $m \in (-\infty, 0.8) \cup (5.2, \infty)$

$|x_1 - x_2| < 1 \iff (x_1 - x_2)^2 < 1$
 $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 1$
 $x_1 + x_2 = \frac{m-2}{m}$
 $x_1x_2 = \frac{1}{m}$
 $\left(\frac{m-2}{m}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{m} < 1$
 $\frac{m^2 - 4m + 4}{m^2} - \frac{2}{m} < 1$
 $\frac{m^2 - 4m + 4 - 2m}{m^2} < 1$
 $\frac{m^2 - 6m + 4}{m^2} < 1$
 $m^2 - 6m + 4 < m^2$
 $-6m + 4 < 0$
 $6m > 4$
 $m > \frac{2}{3}$
 $m \in (\frac{2}{3}, \infty)$

$2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0$
 $\Delta = (3m+2)^2 - 96 > 0$
 $9m^2 + 12m + 4 - 96 > 0$
 $9m^2 + 12m - 92 > 0$
 $\Delta = 144 + 3264 = 3408$
 $m_1 = \frac{-12 - \sqrt{3408}}{18} \approx -6.5$
 $m_2 = \frac{-12 + \sqrt{3408}}{18} \approx 1.5$
 $m \in (-\infty, -6.5) \cup (1.5, \infty)$

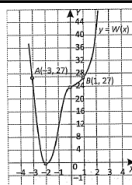
$|x_1 - x_2| < 1 \iff (x_1 - x_2)^2 < 1$
 $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 1$
 $x_1 + x_2 = \frac{3m+2}{2}$
 $x_1x_2 = \frac{12}{2} = 6$
 $\left(\frac{3m+2}{2}\right)^2 - 2 \cdot 6 < 1$
 $\frac{(3m+2)^2}{4} - 12 < 1$
 $(3m+2)^2 < 52$
 $3m+2 < \sqrt{52}$
 $3m < \sqrt{52} - 2$
 $m < \frac{\sqrt{52} - 2}{3} \approx 1.5$

$2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0$
 $\Delta = (3m+2)^2 - 96 > 0$
 $9m^2 + 12m + 4 - 96 > 0$
 $9m^2 + 12m - 92 > 0$
 $\Delta = 144 + 3264 = 3408$
 $m_1 = \frac{-12 - \sqrt{3408}}{18} \approx -6.5$
 $m_2 = \frac{-12 + \sqrt{3408}}{18} \approx 1.5$
 $m \in (-\infty, -6.5) \cup (1.5, \infty)$

$|x_1 - x_2| < 1 \iff (x_1 - x_2)^2 < 1$
 $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 < 1$
 $x_1 + x_2 = \frac{3m+2}{2}$
 $x_1x_2 = \frac{12}{2} = 6$
 $\left(\frac{3m+2}{2}\right)^2 - 2 \cdot 6 < 1$
 $\frac{(3m+2)^2}{4} - 12 < 1$
 $(3m+2)^2 < 52$
 $3m+2 < \sqrt{52}$
 $3m < \sqrt{52} - 2$
 $m < \frac{\sqrt{52} - 2}{3} \approx 1.5$

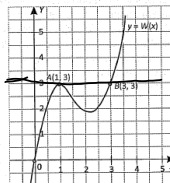
5.219. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie $\text{st. } W(x) = 4$. Funkcja W ma jedno miejsce zerowe -2 . Do wykresu funkcji W należą punkty $A(-3, 27)$ oraz $B(1, 27)$. Wykres funkcji W ma z osią OY punkt wspólny $(0, 24)$. Napisz wzór funkcji $y = W(x)$ w postaci ogólnej.

$$W(x) = a(x+2)^2(x^2+bx+c)$$



5.220. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie $\text{st. } W(x) = 3$. Współczynnik przy najwyższej potęgze zmiennej jest równy 1. Do wykresu funkcji W należą punkty $A(1, 3)$ oraz $B(3, 3)$, a wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych.

- a) Napisz wzór funkcji wielomianowej W w postaci ogólnej.
 b) Oblicz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji wielomianowej W z prostą o równaniu $4x - y - 9 = 0$.



$$W(x) = x^3 + bx^2 + cx$$

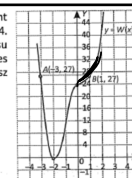
$$W(x) - 3 = (x-1)(x-3)^2$$

$$W(x) = (x-1)(x-3)^2 + 3 = 4x^2 - 9x + 3$$

$$-4 \cdot 9 + 0 = -18$$

5.219. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie $\text{st. } W(x) = 4$. Funkcja W ma jedno miejsce zerowe -2 . Do wykresu funkcji W należą punkty $A(-3, 27)$ oraz $B(1, 27)$. Wykres funkcji W ma z osią OY punkt wspólny $(0, 24)$. Napisz wzór funkcji $y = W(x)$ w postaci ogólnej.

$$W(x) = a(x+2)^2(x^2+bx+c)$$



$$W(x) - 27 = a(x+3)(x-1)^3$$

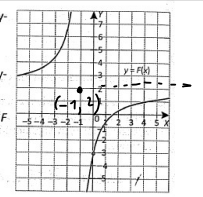
$$\begin{cases} a \cdot c = 6 \\ a(1+b) = -3 \\ a(b-6) = 7 \end{cases}$$

$$u(x) = (x+2)^2(x^2-4x+6)$$

$$x < 0$$

$$\begin{matrix} a=4 \\ a=1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} b=-4 \\ c=6 \end{matrix}$$

6.185. Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji homograficznej $F(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, gdzie $x \neq -c$ oraz $ac - b \neq 0$. Korzystając z tego rysunku oraz wiedząc, że do wykresu funkcji F należy punkt $A(0, -3)$, wyznacz:



$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -c \end{cases} \Rightarrow c = 1$$

$$y = \frac{ax+b}{x+1}$$

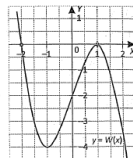
$$-3 = f(0) = \frac{b}{1} \Rightarrow b = -3$$

$$y = \frac{ax-3}{x+1}$$

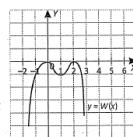
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 = a$$

$$y = \frac{2x-3}{x+1}$$

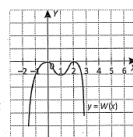
5.224. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie $\text{st. } W(x) = 3$. Funkcja W dla argumentu -3 przyjmuje wartość 16. Funkcja ma dwa miejsca zerowe -2 oraz 1 .



a) Napisz wzór funkcji W w postaci ogólnej.
b) Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja W przyjmuje wartości nieujemne.
c) Wyznacz współrzędne punktów wspólnych wykresu funkcji W i paraboli o równaniu $f(x) = 2x^2 - 6x - 20$.



5.225. Na rysunku obok przedstawiony jest fragment wykresu funkcji wielomianowej $y = W(x)$, gdzie $\text{st. } W(x) = 4$. Funkcja W ma dwa miejsca zerowe 0 oraz 2 , a dla argumentu -2 przyjmuje wartość równą -16 .



a) Napisz wzór funkcji W w postaci ogólnej.
b) Napisz wzór funkcji G , której wykres otrzymamy, przekształcając wykres funkcji W przez translację o wektor $\vec{u} = [-1, 9]$.
Podaj wzór funkcji G w postaci iloczynowej.

8.12. Dla jakich liczb a, b, c, d równość $||x|-1| = a|x| + b|x-1| + c|x+1| + d$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x ?

8.13. Wykaż, że wykres funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$ ma środek symetrii.

$$f(x) = (x+1)^3 - 4 \quad \left[\frac{-1}{-4} \right]$$

$$f(x) = x^3 \quad \text{np.} \Rightarrow (0,0) \text{ i } \text{sym.}$$

$$f(-x) = -x^3$$

$$S_c(-1, -4)$$

8.12. Dla jakich liczb a, b, c, d równość $||x|-1| = a|x| + b|x-1| + c|x+1| + d$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x ?

8.13. Wykaż, że wykres funkcji $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$ ma środek symetrii.

$$L(x) = ||x|-1|$$

$$P(x) = a|x| + b|x-1| + c|x+1| + d$$

$$\begin{aligned} P(0) &= 1 = b + c + d \\ P(1) &= 0 = a + b + d \\ P(-1) &= 0 = a + b + d \\ b &= c \\ c + 1 &= 1 \Rightarrow c = 0 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

$$P(x) = -|x| + |x-1| + |x+1| - 1$$

$$P(-1) = -1 + 2 + 1 - 1 = 1$$

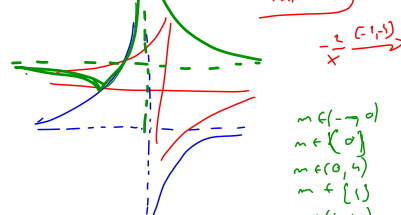
6.187. Dziedzina funkcji homograficznej $F(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Miejscem zerowym funkcji F jest liczba $-\frac{3}{2}$, a do jej wykresu należy punkt $A\left(-\frac{1}{2}, -8\right)$. Oblicz wartości współczynników a, b, c . Dla obliczonych wartości a, b, c :

a) naskicuj wykres funkcji F
b) zbadaj liczbę rozwiązań równania $\left| \frac{ax+b}{x+c} \right| = m$ ze względu na wartość parametru m ($m \in \mathbb{R}$).

$$\textcircled{1}: x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} = \mathbb{R} \setminus \{-c\} \Rightarrow c = 1$$

$$\begin{aligned} a \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + b &= 0 & b &= \frac{3}{2}a \\ -8 &= \frac{a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b}{-\frac{1}{2} + 1} & (a = -4) & \quad b = -6 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{-4x-6}{x+1} = \frac{-4(x+1)-2}{x+1} = \frac{-4}{x+1} - 1$$



$m \in (-\infty, 0)$	0
$m \in \{0\}$	1
$m \in (0, 4)$	2
$m \in \{4\}$	1
$m \in (4, +\infty)$	2

* 8,9. Znajdź wszystkie funkcje $f(x)$ spełniające równanie:

a) $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$, gdy $x \neq 0$; b) $(x-1)f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x-1}$, gdy $x \in (0; 1)$;

c) $2f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, gdy $x \neq 0$; d) $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$, gdy $x \in (-1; 1)$.