Zadanie 17. (5pkt)

Okrąg o_1 o równaniu $(x+6)^2+(y+7)^2=50$ oraz okrąg o_2 o środku $S_2(-3,-10)$ są wewnętrznie styczne, przy czym okrąg o_2 zawiera się w kole opisanym nierównością $(x+6)^2+(y+7)^2\le 50$. Napisz równanie wspólnej stycznej do obu okręgów.

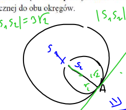
$S_1(-6,-7)$ $r_1=5\sqrt{2}$

$|S_1S_2|=3\sqrt{2}$ $|S_1S_2|=5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{S_2S_1}=[3,-3]$

$\perp$ $3x-3y+C=0$

$k: y=x+b$



$k: y=x+b$

$\overrightarrow{S_2S_1} \parallel \overrightarrow{S_1A}$

I $A=o_1\cap o_2$

$\overrightarrow{S_2S_1}=\frac{3}{5}\overrightarrow{S_1A}$

$A=S_1+\overrightarrow{S_1A}$ $\boxed{\overrightarrow{S_1A}=A-S_1}$

$A(-1,-11)$ $y=(x+1)-11$ $y=x-11$

III 1) $y\perp(S_1S_2)=L$

2) $A=o_1\cap L\cap o_2$

Zadanie 16. (3pkt)

Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy jednocześnie trzy liczby ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wśród wylosowanych liczb będzie liczba 3, pod warunkiem, że suma wylosowanych liczb będzie nieparzysta. Wynik przedstaw w postaci ułamka nieskracalnego.

Ω – losowanie 3 z 9

$P(A|B)=\frac{\overline{\overline{A\cap B}}}{\overline{\overline{B}}}$

$\overline{\overline{B}}=\binom{5}{3}+\binom{4}{2}\binom{5}{1}=10+6\cdot 5=40$

$\overline{\overline{A\cap B}}=1\binom{4}{2}+1\binom{4}{1}=6+6=12$

$P(A|B)=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$

$P(A|B)=\frac{3\cdot 4\cdot 2+3\cdot 4\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3+\dots}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

Zadanie 15 (6pkt)

Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o stosunku boków 1 : 3. Objętość bryły jest równa 12. Oblicz wymiary tego prostopadłościanu, aby jego powierzchnia całkowita była najmniejsza. Oblicz tę najmniejszą powierzchnię.

---

b) 1

c) $-\frac{1}{8}$

Zadanie 52.

Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych x i y, które spełniają równanie

$$\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 y=3+\sin^2(x+y).$$

$P\in\langle 3,4\rangle$

$L=a^4+b^4+\frac{2}{a^2b^2}$

$(a^2-b^2)^2+2a^2b^2+\frac{2}{a^2b^2}=(a^2-b^2)^2+2\left(c+\frac{1}{c}\right)\geq 4$

$c\in(0,+\infty)$ $c=1$

$\begin{cases}3+\sin^2(x+y)=4\\ \operatorname{tg}^2x\cdot\operatorname{tg}^2y=1\\ \operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}^2y=0\end{cases}$

$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y \vee \operatorname{tg}x=-\operatorname{tg}y$

$|\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y|=1$

$|\sin(x+y)|=1$ $x+y=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$|\operatorname{tg}x|=1$

$|\operatorname{tg}y|=1$

$\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \quad y=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}}$

Zadanie 56.

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania:

$$\log_{\sin 2x}\cos 2x+\log_{\cos 2x}\sin 2x=2$$

spełniające nierówność $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x+(\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x\le 34.$

$\sin 2x>0$

$\sin 2x\neq 1$

$\cos 2x>0$

$\cos 2x\neq 1$

$2x\in(2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi)$

$a+\frac{1}{a}=2 \Leftrightarrow a=1 \Leftrightarrow \sin 2x=\cos 2x$

$2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\boxed{x=\frac{\pi}{8}+k\pi}$

$(\sqrt{2}+1)^x+\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^x}\le 34$ $|\cdot n>0$

$n^2-34n+1\le 0$

$\Delta=34^2-4=(17-1)(17+1)=16\cdot 18\cdot 4$

$n_1=17-12\sqrt{2}$

$n_2=17+12\sqrt{2}$

$((\sqrt{2}+1)^2)^2=(3+2\sqrt{2})^2=17+12\sqrt{2}$

$x\in\langle -4,4\rangle$

$x=\frac{\pi}{8}+k\pi$ $\pi\approx 3{,}14$

$x\in\{\frac{\pi}{8},-\frac{7}{8}\pi,\frac{9}{8}\pi\}$

Zadanie 57.

Wyznacz zbiór wszystkich argumentów x, dla których wartości funkcji

$$f(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}}|x-3|\right| \in (1, 3)$$

należą do zbioru (1; 3).

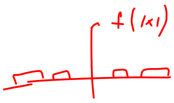
$$\left|\log_2|x-3|\right|$$

$$\log_2|x-3| \in (-3,-1) \cup (1,3)$$

$$\log_2|x-3| \in (\log_2 2^{-3}; \log_2 2^{-1}) \cup (\log_2 2^1; \log_2 2^3)$$

$+$

$$|x-3| \in \left(\tfrac{1}{8}; \tfrac{1}{2}\right) \cup (2, 8)$$



$$x-3 \in (-8,-2) \cup \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{8}\right) \cup \left(\tfrac{1}{8}; \tfrac{1}{2}\right) \cup (2, 8)$$

$$x \in (-5,1) \cup \left(2{,}5; 2\tfrac{7}{8}\right) \cup (3{,}125; 3{,}5) \cup (5, 11)$$

Zadanie 60.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^{\log_y z} + z^{\log_y x} = 512 \\ y^{\log_z x} + x^{\log_z y} = 8 \\ z^{\log_x y} + y^{\log_x z} = 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Zadanie 65.

Określ dziedzinę nierówności

$$\left|\log_x y + \log_y x\right| \geq 2.$$

i udowodnij jej prawdziwość.

Zadanie 67.

Wykaż, że dla $n > 1$ zachodzi równość

$$\log_{1996!} n = \frac{1}{\frac{1}{\log_2 n} + \frac{1}{\log_3 n} + \ldots + \frac{1}{\log_{1996} n}}.$$

Zadanie 68.

Udowodnij, że jeżeli $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R_+$ i $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = a, a \neq 1$, to zachodzi nierówność

$$(\log_a x_1)^2 + (\log_a x_2)^2 + \ldots + (\log_a x_n)^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Zadanie 69.

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$\log_n 2 \cdot \log_n 4 \cdot \log_n 6 \cdot \ldots \cdot \log_n (2n-2) \leq 1.$$