

791. Udowodnij, że jeżeli $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$ i ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ jest ciągiem arytmetycznym, to

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

790. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c są odpowiednio k -tym, l -tym i m -tym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego, przy czym

$$k \neq l \text{ i } k \neq m, \text{ to } \frac{a-b}{k-l} = \frac{a-c}{k-m}.$$

804. O ciągu arytmetycznym (a_n) wiadomo, że: $a_1 + a_5 = \frac{5}{3}$ i $a_3 \cdot a_4 = \frac{65}{72}$.

Oblicz sumę 17 początkowych wyrazów tego ciągu.

804. O ciągu arytmetycznym (a_n) wiadomo, że: $a_1 + a_5 = \frac{5}{3}$ i $a_3 \cdot a_4 = \frac{65}{72}$.

Oblicz sumę 17 początkowych wyrazów tego ciągu.

$$S_{17} = \frac{a_1 + a_{17}}{2} \cdot 17 = \frac{2a_1 + 16r}{2} \cdot 17 = (a_1 + 8r) \cdot 17 = a_9 \cdot 17$$

$$2a_1 + 4r = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{5 - 4r}{2}} \Rightarrow a_1 = \frac{5}{2} - 2r \Rightarrow a_1 + 2r = a_3 = \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{6} \cdot (a_1 + 3r) = \frac{65}{72} \quad | \cdot \frac{6}{5}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3r = \frac{13}{12} \\ a_1 + 2r = \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 3r = \frac{13}{12} \\ a_1 + 2r = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{r = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

$$a_1 + \frac{4^3}{12 \cdot 6} = \frac{5}{6}$$

790. Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c są odpowiednio k -tym, l -tym i m -tym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego, przy czym $k \neq l$ i $k \neq m$, to $\frac{a-b}{k-l} = \frac{a-c}{k-m}$.

$$a = a_1 + (k-1)r$$

$$b = a_1 + (l-1)r$$

$$c = a_1 + (m-1)r$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k-1)r - (l-1)r}{k-l} \stackrel{?}{=} \frac{(k-1)r - (m-1)r}{k-m}$$

$$\frac{kr - lr}{k-l} \stackrel{!}{=} \frac{kr - mr}{k-m}$$

$$r=r \quad \text{punkt} \Rightarrow \text{T.O.K.}$$

$$a_m = a_k + (m-k)r$$

$$\frac{a_m - a_k}{m - k} = r$$

$$a = a_k$$

$$b = a_l$$

$$c = a_m$$

$$\frac{a-b}{k-l} = \frac{a_k - a_l}{k-l} = r$$

$$r = \frac{a_m - a_k}{m - k}$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

850. Wykaż, że jeśli ciąg (a, b, c, d) jest ciągiem geometrycznym, to $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.

849. Wykaż, że jeśli ciąg (a, b, c, d) jest ciągiem geometrycznym, to $(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 = (a-d)^2$.

857. Wykaż, że jeżeli ilorazem ciągu geometrycznego (a_n) jest $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to każdy wyraz tego ciągu oprócz wyrazu pierwszego i ostatniego równy jest różnicy wyrazu następującego po nim i wyrazu go poprzedzającego.

858. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ wiedząc, że $a \neq 0$ i współczynniki a, b, c, d tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 3.

832. Dana jest następująca tablica liczb naturalnych zwana tablicą Pitagorasa:

1	2	3		n
2	4	6		$2n$
3	6	9	...	$3n$
...	...	...	...	...
n	$2n$	$3n$	...	n^2

Oblicz n wiedząc, że suma wszystkich liczb tablicy jest równa 36 100.

832. Dana jest następująca tablica liczb naturalnych zwana tablicą Pitagorasa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 2n & 3n & \dots & n^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} + n \\ 2n \\ 3n \\ \dots \\ n^2 \end{matrix} = \frac{1+n}{2} \cdot n \quad \frac{2+2n}{2} \cdot n = 2 \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n$$

$$\frac{3+3n}{2} \cdot n = 3 \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n \quad \frac{n+n^2}{2} \cdot n = n \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n$$

Oblicz n wiedząc, że suma wszystkich liczb tablicy jest równa

$$36100. = x$$

$$S_{u_1} + S_{u_2} + S_{u_3} + \dots + S_{u_n} = \frac{1+n}{2} \cdot n (1+2+3+\dots+n) = \left(\frac{1+n}{2} \cdot n \right)^2 = X$$

$$\frac{1+n}{2} \cdot n = \sqrt{36100} = 190$$

$$n \cdot (n+1) = 380$$

$$\begin{aligned} (19) \cdot 20 &= 380 \\ -20 \cdot (19) &= 380 \end{aligned}$$

$$n = 19$$

126.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1} \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{(x+12)\sqrt{x-6x-8}}}{\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{\sqrt{2}+1} \sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} + \sqrt[3]{(x-2)3}}{\frac{x(x-1)}{x-1} - 1} =$$

①

$$= \frac{1 + x - 2}{x - 1} = 1$$

$$x > 0$$

$$127. \frac{\sqrt{a^3}b\sqrt[3]{a^4}+\sqrt{a^4b^3}:\sqrt[6]{a}}{(b^2-ab-2a^2)\sqrt{ab}} - a^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{3a^2}{3b-6a+2ab-b^2} : \frac{a+b}{3a-ab} - \frac{ab}{a+b} \right)$$

$$128. \left[\frac{10x^2+3ax}{4x^2-a^2} + \frac{bx-x^2-ax+ab}{2x+a} : (b-x) - 2 \right] \times \left[\frac{(a+2x)^{-\frac{1}{2}} + (2x-a)^{\frac{1}{2}}}{(4x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}} + 1} \right]^2$$

857. Wykaż, że jeżeli ilorazem ciągu geometrycznego (a_n) jest $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to każdy wyraz tego ciągu oprócz wyrazu pierwszego i ostatniego równy jest różnicy wyrazu następującego po nim i wyrazu go poprzedzającego.

$$Z: q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$a_n - c. geom$

$$\forall i \in \{2, \dots, n-1\} \quad a_i = a_{i+1} - a_{i-1}$$

$$\begin{aligned} D: P &= a_i \cdot q - a_i \cdot q^{-1} = a_i \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{5}} \right) = a_i \left(\frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2} \right) \\ &= a_i = L \end{aligned}$$

858. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ wiedząc, że $a \neq 0$ i współczynniki a, b, c, d tworzą ciąg geometryczny o ilorazie 3.

$a: b: c: d$

$$q=3 \quad x^3 + 3x^2 + 9x + 27 = 0$$

$$x^2(x+3) + 9(x+3) = 0$$

$$(x+3)(x^2+9) = 0$$

$$x = -3$$

849. Wykaż, że jeśli ciąg (a, b, c, d) jest ciągiem geometrycznym, to $(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 = (a-d)^2$.

$$(a-aq^2)^2 + (aq-aq^2)^2 + (aq-aq^3)^2 \stackrel{?}{=} (a-aq^3)^2$$

$$= a^2 - 2a^2q^2 + a^2q^4 = (a - aq^2)^2 = P$$

$$\text{" } a^2(1-q)^2 \left[(1+q)^2 + q^2 + q^2(1+q)^2 \right]$$

850. Wykaż, że jeśli ciąg (a, b, c, d) jest ciągiem geometrycznym, to $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.

NCS...

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^m y_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^m x_i y_i \right)^2$$

$$\sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^m y_i^2 = \left(\sum_{i=1}^m x_i y_i \right)^2 \Leftrightarrow x_i = \sqrt{y_i} / \sqrt{y_i}$$

$$\frac{x_i}{y_i} = \sqrt{\frac{y_i}{y_i}} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{l} m=3 \\ x_1=a \quad y_1=b \\ x_2=b \quad y_2=c \\ x_3=c \quad y_3=d \end{array} \Rightarrow T \in \mathbb{Z}A$$

850. Wykaż, że jeśli ciąg (a, b, c, d) jest ciągiem geometrycznym, to
 $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.

$$L = (a^2 + a^2q^2 + a^2q^4)(a^2q^2 + a^2q^4 + a^2q^6) = \frac{SP \parallel}{a^4q^2(1+q^2+q^4)^2}$$

$$P = (a^2q + a^2q^3 + a^2q^5)^2 = a^4q^2(1+q^2+q^4)^2 \quad (=P \text{ c.n.})$$

870. Wykaż, że jeżeli ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ jest ciągiem geometrycznym

o ilorazie q takim, że $|q| \neq 1$, to $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n = \frac{q(a_n^2 - a_1^2)}{q^2 - 1}$.

890. Znajdź trzy liczby rzeczywiste tworzące ciąg geometryczny wiedząc, że jeśli do drugiej z tych liczb dodamy 8, to powstała trójka liczb utworzy ciąg arytmetyczny, a jeśli do trzeciego wyrazu powstałego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to otrzymamy trzy liczby tworzące ponownie ciąg geometryczny.

893. Z czterech liczb rzeczywistych trzy pierwsze tworzą ciąg geometryczny, a trzy ostatnie ciąg arytmetyczny. Znajdź te liczby wiedząc, że suma pierwszej i ostatniej liczby jest równa 14, a suma pozostałych 12.

871. Udowodnij, że jeżeli $S_1, S_2, \dots, S_n$ są sumami n początkowych wyrazów n ciągów geometrycznych, w których pierwsze wyrazy są równe 1, a ilorazy odpowiednio równe 1, 2, ..., n , to
 $S_1 + S_2 + 2S_3 + 3S_4 + \dots + (n-1)S_n = 1^n + 2^n + \dots + n^n$.

881. Udowodnij, że suma 30 początkowych wyrazów ciągu (3, 33, 333, ...) należy do przedziału $(10^{29}; 10^{30})$.

875. Wykaż, że jeżeli S_n , S_{2n} i S_{3n} oznaczają odpowiednio sumę n , $2n$ i $3n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) , to $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

873. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) określonego rekurencyjnie równościami: $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

791. Udowodnij, że jeżeli $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+$ i ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ jest ciągiem arytmetycznym, to

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}.$$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n-1} - a_n} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n}}{-r} = \\
 &\quad \begin{array}{ccc} \text{"} & \text{"} & \\ -r & -r & \end{array} \\
 \frac{a_1 - a_n}{-r(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n})} &= \frac{a_1 - \overbrace{a_1 - (n-1)r}^{-r}}{-r(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}} = P_{n-1}
 \end{aligned}$$

822. Wykaż, że jeśli w ciągu arytmetycznym (a_n) prawdą jest, że

$$a_n = \frac{1}{m} \text{ i } a_m = \frac{1}{n} \text{ i } m \neq n, \text{ to } S_{mn} = \frac{1+mn}{2},$$

gdzie $S_{mn} = a_1 + a_2 + \dots + a_{mn}$.