

2.136. O funkcji ciągłej f wiadomo, że jeśli $x \in (7, 10)$, to $f'(x) > 0$. Styczna w punkcie $A(10, 8)$ należącym do wykresu funkcji f ma współczynnik kierunkowy równy zero. Ponadto funkcja f jest malejąca w przedziale $(10, 15)$. Spośród poniższych zdań wybierz zdania prawdziwe. Uzasadnij swój wybór.

- ~~a)~~ W punkcie 10 funkcja f ma minimum lokalne.
~~b)~~ W punkcie 10 funkcja f ma maksimum lokalne.
~~c)~~ W punkcie 10 funkcja f nie ma ekstremum lokalnego.
 d) Styczną do wykresu funkcji f w punkcie A opisuje równanie $y = 8$.
~~e)~~ Styczną do wykresu funkcji f w punkcie A opisuje równanie $y = 10$.
~~f)~~ Styczną do wykresu funkcji f w punkcie A opisuje równanie $y = 10x$.

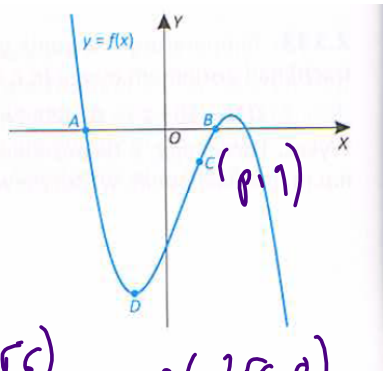
$$a = 0 \quad b = 8 \quad \textcircled{y = 8} - \text{styczna do } f$$

$$\begin{aligned}
 & \nearrow f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (7, 10) \\
 & \searrow f'(x) \leq 0 \text{ dla } x \in (10, 15) \quad \Bigg| \Rightarrow f'(x) \neq 0 \text{ dla } x = 10
 \end{aligned}$$

2. 136 137 140 142 146
6.230, 6.231

2.137. Rysunek obok przedstawia szkic wykresu funkcji $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x - 72$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Punkty A, B, C, D należą do wykresu funkcji f . Wyznacz współrzędne tych punktów, wiedząc, dodatkowo, że:

- punkty A, B należą też do osi OX
- styczna do wykresu funkcji f w punkcie C jest opisana równaniem $y = 24x - 68$
- styczna do wykresu funkcji f w punkcie D jest równoległa do osi OX .



$$f(x) = -(x-3)(x-16)(x+2)$$

$$A(-2, 0)$$

$$B(3, 0)$$

$$D(-1, -100)$$

1p
1p

$$f'(x) = -3(x-1)(x+2)$$

$$y = a(x-p) + q$$

$$a = 24 = f'(a)$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$24 = -3(x_0^2 - 1x_0 - 1)$$

$$x_0^2 - 1x_0 = 0$$

$$x_0 = 0 \vee x_0 = 1$$

$$C(1, -20)$$

2.140. Dla jakich wartości parametru k ($k \in \mathbb{R}$) funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2kx^2 + 3, & \text{jeśli } x \leq 1 \\ \frac{-1}{kx}, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases}$$

jest:

a) ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$
 b) różniczkowalna w zbiorze $\mathbb{R}$?

Handwritten notes:
 $k \neq 0$
 $f \text{ l.c.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 $f \text{ l.d.} \Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+)$
 baw γ dla $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (2kx^2 + 3) = 2k + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{kx} \right) = -\frac{1}{k}$$

$$L = P \Leftrightarrow 2k + 3 = -\frac{1}{k} \quad | \cdot k \neq 0$$

$$\begin{aligned} 2k^2 + 3k + 1 &= 0 \\ (k+1)(2k+1) &= 0 \\ k &= -1 \quad k = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{|x|} = \sqrt{|1|} = 1$$

$$f'_c(x_0) = f'_d(x_0)$$

$$x \in (-\infty, 1)$$

$$f'_1(x) = 4kx$$

$$x \in (1, +\infty)$$

$$f'_2(x) = \frac{1}{kx^2}$$

$$f'_1(1) = f'_2(1) \Leftrightarrow 4k = \frac{1}{k}$$

$$k^2 = \frac{1}{4}$$

$$k = \frac{1}{2} \vee k = -\frac{1}{2}$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

2.146. Wyznacz asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{4}{x} + 3$, gdzie $x \in (-3, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{x} + 3 \right) = \left[0 - \left[\frac{4}{0^-} \right] + 3 \right] = +\infty \Rightarrow \boxed{x=0} \text{ as pionowa}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{x} + 3 \right) = \left[0 - \frac{4}{0^+} + 3 \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{x} + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x} \right) = +\infty \Rightarrow \text{nie ma}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x} \right) = \frac{1}{2} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{x} + 3 - \frac{1}{2}x \right) = 3 = b \quad \begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ \text{nie ma} \end{array}$$

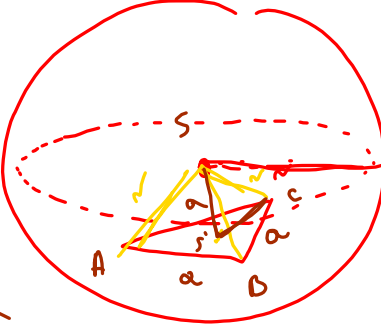
$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 3 - \frac{4}{x}}$$



$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) \neq \pm \infty \Rightarrow \text{nie ma}$$

6.230. W kulę o promieniu r wpisujemy ostrosłupy prawidłowe trójkątne w ten sposób, że wierzchołek ostrosłupa jest środkiem kuli, zaś wierzchołki podstawy należą do powierzchni kuli. Wyznacz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa, którego objętość jest największa.

$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H =$
 $\frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H$
 $2 \Delta CSS' \Rightarrow$
 $4^2 + \frac{1}{9} a^2 = r^2$
 $4^2 = r^2 - \frac{1}{9} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} =$
 $a^2 = 3r^2 - 4^2$
 $a = \sqrt{3r^2 - 4^2}$



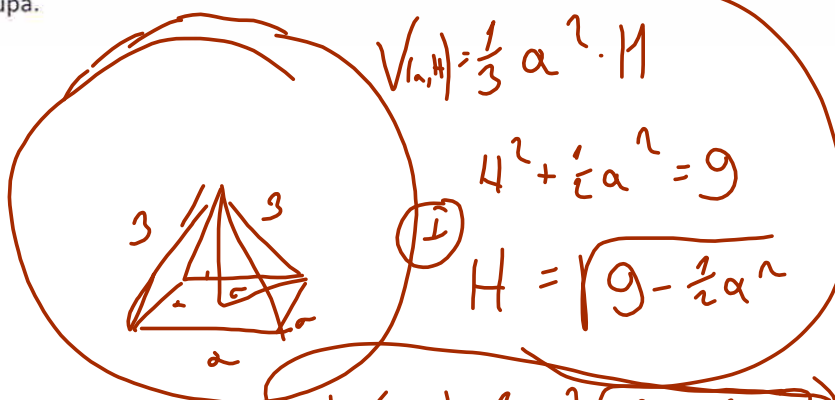
$V(a, H)$
 $V = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H$
 $V(H) = \frac{\sqrt{3}}{4} H (r^2 - H^2) = -\frac{\sqrt{3}}{4} H^3 + \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 H$
 $D_V: H \in (0, r)$
 $V'(H) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} H^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$
 $U_K: V'(H) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{4} (H^2 - \frac{1}{3} r^2) = 0$
 $-\frac{3\sqrt{3}}{4} (H - \frac{\sqrt{3}}{3} r) (H + \frac{\sqrt{3}}{3} r) = 0$
 $\frac{\sqrt{3}}{3} r$
 $-\frac{\sqrt{3}}{3} r$
 UU sygn $V'(H)$

$x \in (0, \frac{\sqrt{3}}{3} r)$	$\frac{\sqrt{3}}{3} r$	$(\frac{\sqrt{3}}{3} r, r)$
+	0	-
↗	↑	↘

$y \sim x$

$H = \frac{\sqrt{3}}{3} r$

6.231. W kulę o promieniu 3 wpisujemy ostrosłupy prawidłowe czworokątne w ten sposób, że wierzchołek ostrosłupa jest środkiem kuli, zaś wierzchołki podstawy należą do powierzchni kuli. Napisz wzór funkcji opisującej objętość $V(x)$ ostrosłupa w zależności od długości krawędzi x jego podstawy. Wyznacz maksymalną objętość ostrosłupa.



$$V(a, H) = \frac{1}{3} a^2 \cdot H$$

$$H^2 + \frac{1}{4} a^2 = 9$$

$$H = \sqrt{9 - \frac{1}{4} a^2}$$

$$V(a) = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{9 - \frac{1}{4} a^2}$$

$$a^2 = 18 - 2H^2$$

$$V(H) = \frac{1}{3} H (18 - 2H^2) = 6H - \frac{2}{3} H^3 \quad \leftarrow V'(H)$$

$$V(a) = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{9 - \frac{1}{4} a^2}$$

$$V(a) = \frac{1}{3} \sqrt{9a^4 - \frac{1}{4} a^6} \quad \text{SP } \downarrow$$

$$V'(a) = \frac{4}{3} a \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dots}} + \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \cdot (-\frac{1}{2} a^5)'$$