

6.219. Rozpatrujemy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 48 cm. Wyznacz wymiary tego graniastosłupa, który ma największą objętość. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

$$8a + 4h = 48 \quad | :4 \quad V = a^2 \cdot h$$

$$\boxed{h = 12 - 2a} \quad V = a^2(12 - 2a)$$

$$h > 0$$

$$a < 6$$

$$V(a) = 12a^2 - 2a^3$$

$$\textcircled{1} a \in (0, 6)$$

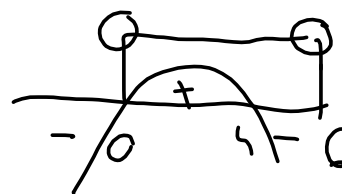
(3p)

$$V'(a) = 24a - 6a^2 = -6a(a - 4)$$

$$\cup K : a \in \{0, 4\}$$

$\cup U :$

$$x \in (0, 4) \quad \uparrow \quad \downarrow \quad x \in (4, 6)$$



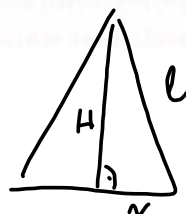
$$\text{at } a = 4 \Rightarrow V(4) = 128$$

$$4 \times 4 \times 4$$

6.221. Wśród stożków o tworzącej mającej długość 4 cm, znajduje się ten, którego objętość jest największa. Wyznacz promień r podstawy i wysokość h tego stożka. Podaj jego największą objętość V .

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

$$l = 4$$



$$r^2 + h^2 = 4^2$$

$$r^2 = 16 - h^2$$

$$\begin{cases} r > 0 \\ h > 0 \end{cases}$$

$$N = 10x$$

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi (16h - h^3) \quad \left. \vphantom{V(h)} \right\} \text{ } p$$

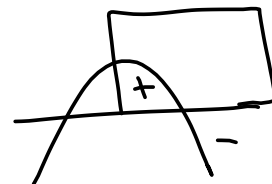
$$(1) : r \in (0, 4)$$

$$V'(h) = \pi (h^2 - \frac{16}{3}) = 0$$

$$h = -\frac{4}{\sqrt{3}}, \quad h = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$V'(h) = \frac{1}{3} \pi \cdot (-3h^2 + 16)$$

UU:

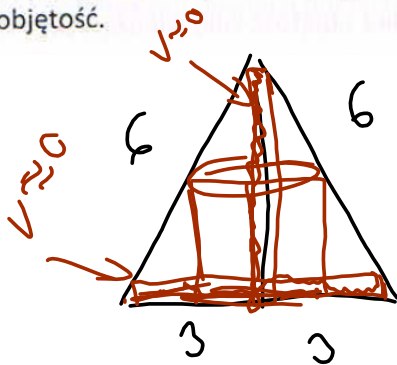


$x \in$	$(0, \frac{4}{\sqrt{3}})$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$(\frac{4}{\sqrt{3}}, 4)$
f'	$\nearrow$	0	$\searrow$
f	$+$	0	$-$

UU₂ =

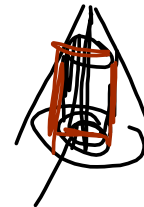
$$V\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3} \pi (16 - h^2) \cdot h = \frac{16 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot 4}{\sqrt{3}} = \frac{128\sqrt{3}}{27} \pi$$

6.225. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu równym $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$. W ten stożek wpisujemy walce w taki sposób, że jedna podstawa walca jest zawarta w podstawie stożka, a okrąg drugiej podstawy walca jest zawarty w powierzchni bocznej stożka. Wyznamy objętość tego walca, który ma największą objętość.



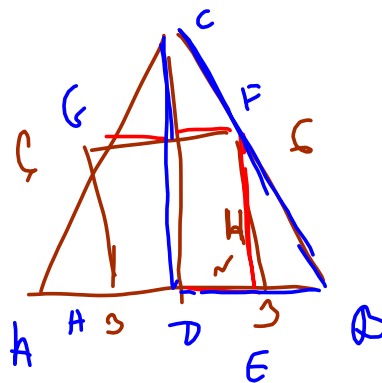
$$P_b = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$h = 3\sqrt{3}$$



$$V = \pi r^2 \cdot H$$

$$V(n, H) = \pi r^2 \cdot H$$



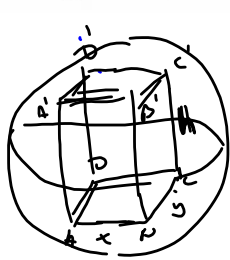
$$\Delta DBC \sim \Delta EDF \Rightarrow \frac{DB}{ED} = \frac{DC}{EF} = \frac{BC}{DF}$$

$$H = \sqrt{3} \cdot (3 - r)$$

$$V = \pi r^2 \cdot \sqrt{3} (3 - r)$$

$$\frac{1}{3-r} = \frac{r}{DF}$$

6.229. W kulę o promieniu $\frac{\sqrt{10}}{2}$ wpisujemy prostopadłościany o polu podstawy równym 4. Wyznacz wymiary prostopadłościanu o największej objętości.

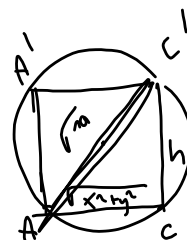


$$xy = 4 \quad y = \frac{4}{x}$$

$$V = xyh = 4h$$

$$x^2 + y^2 + h^2 = 10$$

$$V = 4 \cdot \sqrt{10 - x^2 - y^2}$$



$$V = 4 \sqrt{10 - x^2 - \frac{16}{x^2}} \quad (2p) \quad x \in (0, \sqrt{10})$$

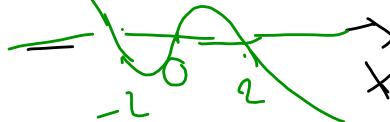
$$f(x) = 10 - x^2 - \frac{16}{x^2}$$

$$f'(x) = -2x + \frac{32}{x^3} = \frac{32 - 2x^4}{x^3} = \frac{-2(x^4 - 16)}{x^3} =$$

$$= \frac{-2(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x^3}$$

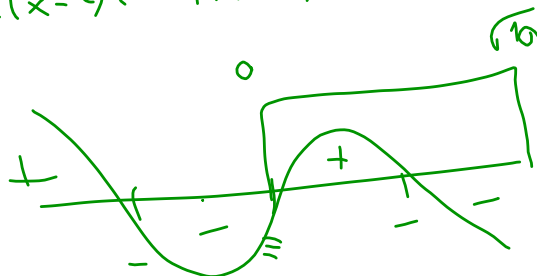
$$\cup K: x \in [-2, 2] \Rightarrow f'(x) = 0$$

$\cup U:$



$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-2(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x^3} > 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{2(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x^3} > 0$$

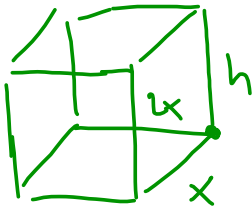


$x \in (0, 2)$	2	$(2, \sqrt{10})$
+	0	-

$\nearrow$ max $\searrow$
 $h = g_{max}$

Zadanie 15. (0-7)

Rozpatrujemy wszystkie prostopadłościany o objętości 8, których stosunek długości dwóch krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest równy 1:2 oraz suma długości wszystkich dwunastu krawędzi jest mniejsza od 28. Wyznacz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jako funkcję długości jednej z jego krawędzi. Wyznacz dziedzinę tej funkcji. Oblicz wymiary tego spośród rozpatrywanych prostopadłościanów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.



$$V = abh = 8 = 2x^2 \cdot h$$

$$(a+b+h < 7)$$

$$h = \frac{4}{x^2}$$

$$P_c = 2ab + 2ah + 2bh =$$

$$P_c = 4x^2 + 4xh + 2xh$$

$$P_c = 4x^2 + \frac{16}{x} + \frac{8}{x} = 4x^2 + \frac{24}{x}$$

$$P_c(x) = 4x^2 + \frac{24}{x}$$

$$P'(x) = 8x - \frac{24}{x^2} = \frac{8(x^3 - 3)}{x^2} = \frac{8(x - \sqrt[3]{3})(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})}{x^2}$$

$$a+b+h < 7 \quad x > 0$$

$$2x+x+h < 7 \quad h > 0$$

$$3x+h < 7$$

$$h > 0 \quad 3x < 7 \quad x < \frac{7}{3}$$

$$h > 0 \quad 7 - 3x > 0 \quad \left(x < \frac{7}{3}\right)$$

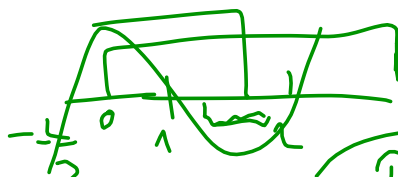
$$\text{II: } x \in \left(\frac{7}{3}, 2\right)$$

$$3x^3 - 7x^2 + 4 < 0$$

$$(x-1)(3x^2 - 4x - 4) < 0$$

$$(x-1)(x-2)(3x+4) < 0$$

$$3x + \frac{4}{x^2} < 7$$



$$\text{II: } x \in (1, 2)$$

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej P . Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

