

Zadanie 1. (0-1)

Funkcja $f(x) = x^3 + 3kx^2 - 4kx + 3$ jest rosnąca w swojej dziedzinie dla

A. $k \in \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$

B. $k \in \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$

C. $k \in (-\infty, 0) \cup \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$

D. $k \in (-\infty, 0) \cup \left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$

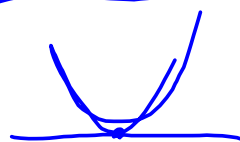
$$f'(x) = 3x^2 + 6kx - 4k$$

$$\Delta_x \leq 0$$

$$(6k)^2 + 48k \leq 0$$

$$3k \left(k + \frac{4}{3} \right) \leq 0$$

$$f'(x) \geq 0$$



Zadanie 2. (0-1)Liczba $\sqrt[3]{61 - 46\sqrt{5}}$ jest równa

~~A. $1 + 2\sqrt{5}$~~

B. $2 - \sqrt{5}$

~~C. $2 + \sqrt{5}$~~

D. $1 - 2\sqrt{5}$

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\left(3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(4 \cos \frac{5}{6}\pi\right)$ jest równa

A. -18

B. -9

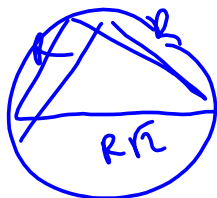
C. $-\frac{3}{2}$

D. 18

$$-3\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zadanie 4. (0–1)

W okrąg o promieniu R wpisano trójkąt równoramienny o podstawie $R\sqrt{2}$. Miara kąta między ramionami trójkąta jest równa

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90° 

Zadanie 5. (0-1)

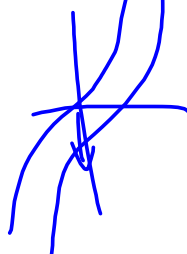
Funkcja, która nie posiada ekstremum, to

A. $f(x) = 2x^2 - 5$

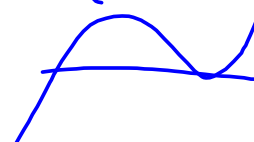
B. $g(x) = 2x^3 - 1$

C. $h(x) = (2x-3)^2$

D. $i(x) = x^3 + 2x^2$



$x^2(x+2)$



Zadanie 6. (0-2)

Wiedząc, że $\log_a x = 3$ i $\log_b x = 4$, oblicz $\log_{ab} x$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

$$\log_{ab} x = \frac{1}{\log_x ab} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} =$$

$$\left(\frac{12}{7} \right)$$

Zadanie 7. (0-2)

Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $2x^2 - 3x - 1 = 0$. Oblicz $x_1^3 + x_2^3$ i zakoduj wynik podając cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku jego rozwinięcia dziesiętnego.

Zadanie 8. (0-2)

Pierwiastkami wielomianu W stopnia czwartego są liczby $4, -3, -2$, przy czym liczba -3 jest jego pierwiastkiem dwukrotnym. Oblicz sumę pierwiastków wielomianu $W(-6x)$. Wynik podaj z dokładnością 10^{-2} i zakoduj wszystkie jego cyfry.

Zadanie 9. (0-2)

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+7)(n-2)(4n)}{4-7(-2)^{n+1}}$. Zakoduj wynik podając cyfrę setek, dziesiątek i jedności.

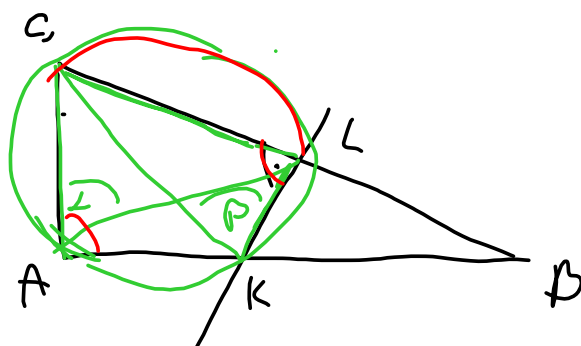
Zadanie 10. (0-3)

Prosta prostopadła do przeciwprostokątnej BC trójkąta ABC przecina ją w punkcie L , a przyprostokątną AB w punkcie K . Udowodnij, że $|\angle CAL| = |\angle CKL|$.

$(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - 3x_1x_2$
 $u(x) = a(x-4)(x+3)(x+2)^2$
 $u(-6x) = a(-6x-4)(-6x+2)^2$
 $-216a(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})^2$
 $(x-\frac{1}{3})$
 (235)

Zadanie 10. (0-3)

Prosta prostopadła do przeciwprostokątnej BC trójkąta ABC przecina ją w punkcie L , a przyprostokątną AB w punkcie K . Udowodnij, że $|\angle CAL| = |\angle CKL|$.



$$T: \alpha = \emptyset$$

D:

$$\cup CLKA$$

$$|\angle CLK| + |\angle KAC| = 180^\circ$$

$$\angle LP \quad \widehat{CL} \quad \Leftarrow CLKA - \text{vs} \quad \text{c-d}$$

Zadanie 11. (0-5)

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, w którym $a_1 = 5$, a różnica jest równa -2 . Ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie 3 i ilorazie 5.

Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \log_3 b_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$.

S_n

$$a_1 = 5 \quad r = -2$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{10 - 2n + 2}{2} \cdot n = n(6 - n) = 11$$

$$L = n \cdot \log_3 (3 \cdot 5^{n-1}) = n(\log_3 3) + (n-1)\log_3 5$$

$$L = n(1 + (n-1)\log_3 5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 + (n-1)\log_3 5)}{n(\frac{5}{n} - 1)} = \frac{\log_3 5}{-1} = -\log_3 5$$

Zadanie 12. (0-3)

Udowodnij, że $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$.

$$\begin{aligned}
 P &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \alpha) \\
 &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\
 &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \\
 &= \sin^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\
 &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot 1 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 &= \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

Zadanie 13.....(0-5)¶

Oblicz wartość wyrażenia $\cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha$ wiedząc, że $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}$ i $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$$(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos^2 \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{6} \left(1 + \frac{11}{25} \right) =$$

$$-\frac{35\sqrt{3}}{150}$$

$$\frac{\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha}{10^2}$$

$$\sin^3 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^3 \alpha = \frac{1}{12}$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{11}{12}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{11}{24}$$

Zadanie 14. (0-4)

Rozwiąż równanie $|3x - 6| - |x^2 - 4| = 0$.

$$3|x-2| - |x-2||x+2| = 0$$

$$|x-2|(3 - |x+2|) = 0$$

$$\downarrow$$
$$x=2$$

$$|x+2|=3$$

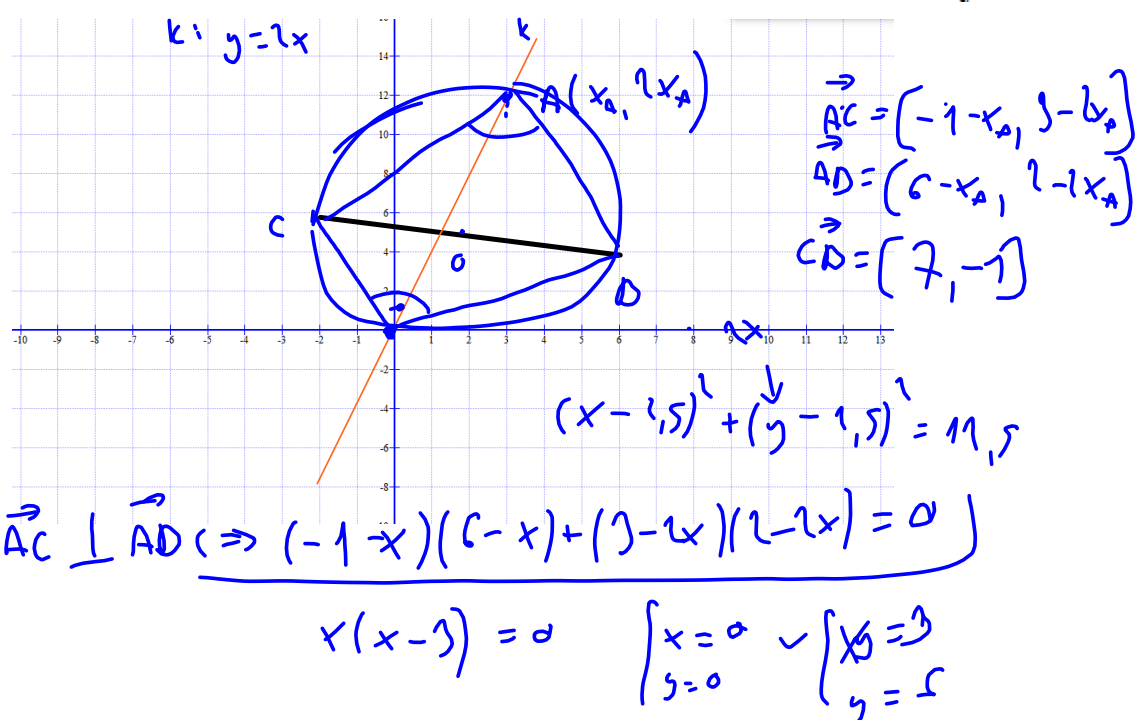
$$x+2=3 \quad \vee \quad x+2=-3$$

$$x=1 \quad \vee \quad x=-5$$

$$\text{czy } x \in \{-5, 1, 2\}$$

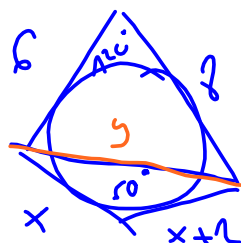
Zadanie 15. (0-4)

Punkty $B = (6, 2)$ i $C = (-1, 3)$ są końcami przeciwprostokątnej trójkąta ABC , przy czym A jest punktem prostej $2x - y = 0$. Wyznacz współrzędne punktu A .



Zadanie 16. (0-6)

Dwa sąsiednie boki czworokąta są długości 6 cm oraz 8 cm, a kąt zawarty między nimi ma miarę $\frac{2\pi}{3}$. Oblicz pole czworokąta, wiedząc że można w niego wpisać okrąg i jednocześnie można na nim opisać okrąg.



$$y^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 110$$

$$y^2 = x^2 + (x+2)^2 - x(x+2) \cdot \cos 50$$

$$158 = x^2 + (x+2)^2 - x(x+2)$$

$$158 = x^2 + x^2 + 4x + 4 - x^2 - 2x$$

$$x^2 + 2x = 154$$

$$x(x+2) = 154$$

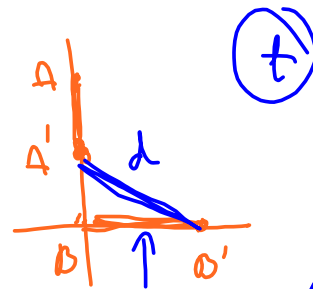
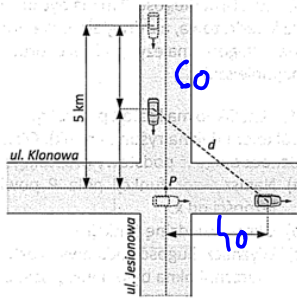
$$P_{\text{czworok.}} = \frac{1}{2} (6 \cdot 8 \cdot \sin 110^\circ + \frac{1}{2} (x \cdot (x+2)) \cdot \sin 50^\circ = 12\sqrt{3} + 77 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 58\sqrt{3}$$

zadanie 17.....(0-7)¶

2.116. Ulica Klonowa jest prostopadła do ulicy Jesionowej, a centrum skrzyżowania ulic znajduje się w punkcie P .

Samochód podróżujący na wschód ze stałą prędkością 40 km/h mija punkt P w tym samym czasie, w którym samochód podróżujący na południe ze stałą prędkością 60 km/h znajduje się dokładnie 5 km na północ od punktu P .

Oblicz, po jakim czasie t [h] odległość między samochodami będzie najmniejsza, i oszacuj tę odległość z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.



$$d^2 = |A'B|^2 + |B'D|^2$$

$$|A'B| = 5 - |AA'| = 5 - 60t$$

$$|B'D| = 40t$$

$$f(t) = (5 - 60t)^2 + (40t)^2$$

$$f(t) = 5200t^2 - 600t + 25$$

$$f : t \in (0, +\infty)$$

$$p = \frac{600}{5200 \cdot 2} = \frac{6}{52}$$

$$r = \frac{2}{52} \text{ (h)}$$

$$d = \sqrt{\left(5 - \frac{60 \cdot 2}{52}\right)^2 + \left(\frac{40 \cdot 2}{52}\right)^2} \approx 1.7$$