

1) $f(x) = \sqrt{4x^2 - x}$ $\sqrt{0} = 0$ $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

2) $4x(x - \frac{1}{4}) > 0$ $F_1 = 1$ $F_2 = \frac{1}{4}$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{4x^2 - x} = 0 \Rightarrow$ nie ma pion. w 0

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} \sqrt{4x^2 - x} = 0 \Rightarrow$ nie ma pion. w $\frac{1}{4}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{4x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| \sqrt{4 - \frac{1}{x}} = +\infty \Rightarrow$ nie ma pion.

$y = ax + b$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{4 - \frac{1}{x}}{1}} = \sqrt{4} = 2$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x}{x} = -1$

$a = 2$ $b = -1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (|x| \sqrt{4 - \frac{1}{x}} - 2 \operatorname{sgn}(x) \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| (\sqrt{4 - \frac{1}{x}} - 2)$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| \frac{-\frac{1}{2x}}{\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + 2} = -\frac{1}{4}$

$x \rightarrow +\infty$ $y = 2x - 1$

$x \rightarrow -\infty$ $y = -2x - 1$

$x \cdot \operatorname{sgn}(x) = |x|$ $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} 5x+2, & \text{jeśli } |x| \leq 3 \\ 3x^2, & \text{jeśli } |x| > 3 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x(x+6)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{1 + \frac{6}{x}} = 3 = a$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{\operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{6}{|x|}} = \pm 3 = a$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2}{1x+6} - \frac{\operatorname{sgn}(x) \cdot 3 \cdot x}{\operatorname{sgn}(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 3x^2 - 18|x|}{1x+6} = -18$

asym: $y = -3x - 18$

p: $y = +3x - 18$

69. Wyznacz asymptoty ukośne (poziome) wykresu funkcji f:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-4}{x-3}, & \text{jeśli } x \leq 1 \\ \frac{x-x^3}{x^3+x}, & \text{jeśli } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+5}{2x+4}, & \text{jeśli } x \leq -3 \\ \frac{x^3-2}{x^3}, & \text{jeśli } x > -3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, & \text{jeśli } |x| \leq 4 \\ \frac{2|x|}{x^2+x+5}, & \text{jeśli } |x| > 4 \end{cases}$

$y = -1$

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

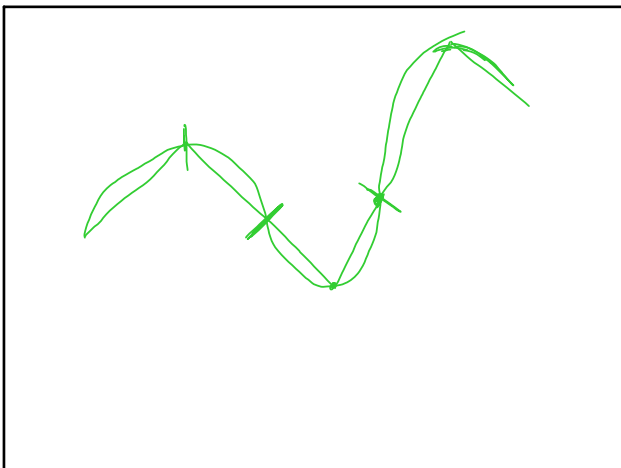
$f''(x) = 6x$

$f'''(x) = 6$

$f'(x) > 0$ $f''(x) > 0$ $f'''(x) > 0$

$f'(x) < 0$ $f''(x) < 0$ $f'''(x) < 0$

Ryc. 4.54.



$f: P \rightarrow \mathbb{R}$ f g i n. $\sqrt{P}$

rozstrzygnięcie o wzrastaniu (maleeniu) funkcji w przedziale:

Twierdzenie 2.
Jeżeli pochodna funkcji f jest w przedziale P dodatnia (ujemna), to funkcja f jest w tym przedziale rosnąca (malejąca).

Twierdzenie 3.
Jeżeli funkcja f jest rosnąca (malejąca) w przedziale P , to ma pochodną $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) dla każdego $x \in P$.

$f'(x) = 0$ dla skończonej ilości argm.

$y = a$

4. Dla jakich wartości m funkcja $f(x) = \frac{m+1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (2m-5)x + 6$ jest rosnąca w zbiorze $\mathbb{R}$?

Handwritten solution:

$f'(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + (2m-5) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Delta \leq 0$

$\Delta = 4(m-1)^2 - 4(m+1)(2m-5) \leq 0$

$4(m^2 - 2m + 1 - 2m^2 + 5m - 2 + 10m - 5) \leq 0$

$4(-m^2 + 13m - 6) \leq 0$

$-m^2 + 13m - 6 \geq 0$

$m \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$

5. Wykaż, że funkcja:

a) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ jest malejąca w przedziale $(0; \frac{\pi}{2})$;

b) $f(x) = 2x - \sin x \cdot \cos x$ jest rosnąca w zbiorze $\mathbb{R}$.

Handwritten solution for (a):

$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2} \leq 0 \quad \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$

$-\sin x \cdot x - \cos x \leq 0$

$x \sin x + \cos x \geq 0$

$x \sin x \geq -\cos x$

$\sin x \geq -\frac{\cos x}{x}$

Handwritten solution for (b):

$f'(x) = 2 - \cos^2 x + \sin^2 x = 2 - \cos 2x \geq 0$

$\cos 2x \leq 2$

$\cos 2x \in [-1, 1]$

$2 - \cos 2x \geq 1 > 0$

6. Udowodnij, że dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $x^4 - x^2 + 1 \geq \frac{1}{x^2 + 1}$.

5. Wykaż, że funkcja:

- a) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ jest malejąca w przedziale $(0; \frac{\pi}{2})$;
- b) $f(x) = 2x - \sin x \cdot \cos x$ jest rosnąca w zbiorze $\mathbb{R}$.