

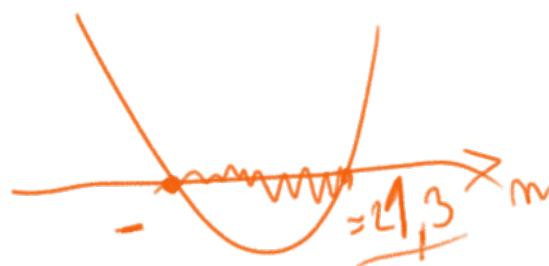
4.17. Suma stu kolejnych liczb naturalnych, które w wyniku podzielenia przez 4 dają resztę 1, jest równa 29500. Wyznacz największą z tych liczb.

4.18. Ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = 2n - 3$, gdzie $n \in N_+$, ma sto wyrazów. Jeżeli od kwadratu wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od końca, odejmiemy kwadrat wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od początku, to otrzymamy różnicę 29400. Oblicz wartość wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od końca.

4.19. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{1+3+5+7+9+\dots+(2n+3)}{4n-7}$, gdzie $n \in N_+$. Które wyrazy tego ciągu są równe 4?

$$\underbrace{a, b, c - \text{c. ant.}}_{\neg} \Leftrightarrow \underbrace{b = \frac{a+c}{2}}$$

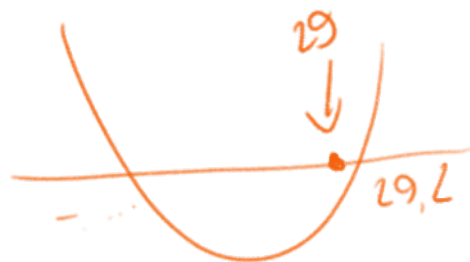
$$\frac{a_1 + a_3}{2} = a_2 \Rightarrow \text{c. ant.}$$



$$k, l \in \mathbb{N}$$

$$n \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 21\}$$

$$\Delta = 15 \sqrt{\dots}$$



$$\begin{cases} S = \frac{a_1}{1-q} \\ |q| < 1 \end{cases}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1(1-q)}{1-q} > 0$$

Zad.1 (2 pkt.)

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie 22 wynosi 12. Wyznacz iloraz tego ciągu.

Zad.2 (3 pkt.)

W ciągu geometrycznym (a_n) zachodzi $a_2 = 4$ oraz $\frac{a_6 + a_9}{a_6} = \frac{7}{8}$. Znajdź pierwszy wyraz tego ciągu.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

$$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

$$a_n = a_k + (n-k) \cdot r$$

$$\text{st} L = 3 \neq \text{st} M = 2$$

Zad.3 (5 pkt.)

Oblicz: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n^2-10)(n-2)}{(3+2n)(4-3n)}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2-6n}{-2+1+4+7+\dots+(3n-5)}$

Zad.4 (3 pkt.)

Rozwiń $x + \frac{x}{x+2} + \frac{x}{(x+2)^2} + \dots = \frac{3}{2}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{n^2+1} - \frac{5n}{3+2n} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20-2n}{3n^2+4} \right)^3$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{9^n + 11^n})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{n^2+1} - \frac{5n}{3+2n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(4 - \frac{10}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right)}{n^2 \left(\frac{3}{n} + 2 \right) \left(\frac{4}{n} - 3 \right)} = -\frac{2}{3} n = -\infty$$

4.17. Suma stu kolejnych liczb naturalnych, które w wyniku podzielenia przez 4 dają resztę 1, jest równa 29500. Wyznacz największą z tych liczb.

4.18. Ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = 2n - 3$, gdzie $n \in N_+$, ma sto wyrazów. Jeżeli od kwadratu wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od końca, odejmiemy kwadrat wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od początku, to otrzymamy różnicę 29400. Oblicz wartość wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od końca.

4.19. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{1+3+5+7+9+\dots+(2n+3)}{4n-7}$, gdzie $n \in N_+$. Które wyrazy tego ciągu są równe 4?

$$n = 100 \quad S_{100} = 29500 =$$

$$a_1 = 4x + 1$$

$$a_2 = 4x + 5 = 4(x+1) + 1$$

$$a_3 = 4x + 9 = 4(x+2) + 1$$

$$a_{10} = 4x + \dots = 4(x+9) + 1$$

$$\underline{a_{100} = 4(x+99) + 1}$$

$$5, 9, 13, 17, \dots, 401$$

97

493

?

$$k \in \mathbb{N}_+, k \leq 100$$

a_{97}

4.18. Ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = 2n - 3$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, ma sto wyrazów. Jeżeli od kwadratu wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od końca, odejmiemy kwadrat wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od początku, to otrzymamy różnicę 29400. Oblicz wartość wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od końca.

$$-1, 1, 3, 5, \dots$$

$$191, 193, 195, 197$$

$$a_{98}^2 - a_3^2 = 29400$$

$$a_{101-k}^2 - a_k^2 = 29400$$

$$a_{100}^2 - a_1^2$$

$$a_{99}^2 - a_2^2$$

$$k=3$$

$$(a_{101-k})^2 - a_k^2 = 29400$$

$$a_n = 2n - 3$$

$$202 - 2k - 3 \left(199 - 2k \right)^2 - (2k - 3)^2 = 29400$$

$$(199 - 2k - 2k + 3)(199 - 2k + 2k - 3) = 29400$$

1. Dany jest ciąg (a_n) zdefiniowany rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3n \end{cases}$. Wykaż, że ciąg $(a_3, a_4, a_5 - 52)$ jest ciągiem arytmetycznym.

2021-12-15

poniedziałek, 13 grudnia 2021

16:26

2 Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = n^3 - 4n^2 + 5$.

a) Wykaż, że wszystkie wyrazy tego ciągu z wyjątkiem jednego są większe lub równe od (-3) .

b) Wyznacz ten wyraz, który jest mniejszy od (-3) .

$$\left((\quad) \right) \cap \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 4, 5, 6, \dots\}$$

$a_3 < -3$

$$a_n = (n-2)(n^2 - 2n - 4)$$

$a_3 =$

3. Dla jakich wartości $x \in \mathbb{R}$ ciąg $(x-2, 5x+10, x-50)$ jest
(3p) geometryczny?

4. Suma trzech pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 6. Różnica wyrazów trzeciego i drugiego jest 5 razy większa od różnicy wyrazów drugiego i pierwszego. Wyznaczyć ten ciąg.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{62}{3} \\ q = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 5 \end{cases} \quad (2, 10, 50) \vee \left(\frac{62}{3}, \frac{62}{3}, \frac{62}{3} \right)$$

5. Narysuj wykres funkcji, podaj Zmf.

(5p) $f(x) = \frac{2}{x-1} + \left(\frac{2}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{2}{x-1}\right)^3 + \dots$



$$f(x) = \begin{cases} 5 \\ |x| < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{x-3} \\ x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \end{cases}$$

$$b^2 = -6b^2 + 180b + 105b - 4900$$

Zadanie 8.14. [matura, czerwiec 2015, zad. 7 swe. (6 pkt)]

Trzy liczby, których suma jest równa 105, są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Pierwsza z tych liczb jest jednocześnie pierwszym, druga szóstym, a trzecia dwudziestym szóstym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz te liczby.

$$7b^2 - 385b + 4900 = 0$$

$$a = 2b - 35$$

$$b^2 = (2b - 35)(-3b + 140)$$

$$c = 5b - 4(2b - 35) = -3b + 140$$

$$b^2 - 55b + 700 = 0$$

$$(b - 35)(b - 20) = 0$$

$$70 \cdot 10$$

$$\underline{35} \cdot \underline{20}$$

$$b = 35$$

$$b = 20$$

$$a = 35$$

$$a = 5$$

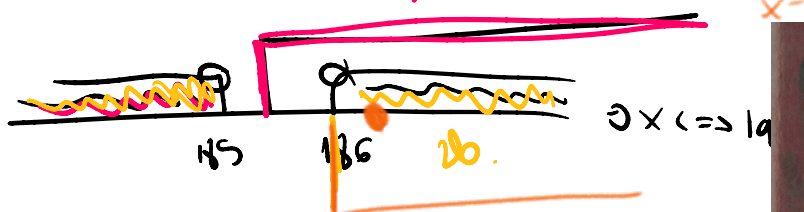
$$a = 2b - 35$$

Zadanie 8.16. [matura, maj 2016, zad. 8. (2 pkt)]

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$ dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x , dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jest zbieżny.

$$\left|\frac{a}{b}\right| < 1 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{|a|}{|b|}}_{>0} < 1 \quad |a| < |b|$$

$$a_n > 0$$



$$|q| > \alpha \Rightarrow$$

$$\underline{2x - 365 > 1} \quad \vee \quad \underline{2x - 365 \leq -1}$$

$$\boxed{x < 185} \quad \cup \quad \boxed{x > 186}$$



$$\frac{5}{0^-} \approx \frac{5}{\frac{1}{-1000000}} = 5 \cdot \frac{-1000000}{1} = -5000000 = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5n}{-n^2 + 3n + 1}$$

$$\text{st} L = 3 \quad \text{st} M = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(1 - \frac{5}{n^2})}{n^2(-1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n})} = \left[\frac{\infty}{-1} \right] = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(1 - \frac{5}{n^2})}{n^2(-\frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \frac{1}{n})} = \left[\frac{+1}{0^-} \right] = -\infty$$

$0^- < 0 \quad 0 \quad 0^+ > 0$

2021-12-20

środa, 15 grudnia 2021 18:11

827. Wykaż, że jeśli równanie $x^4 + px^2 + q = 0$ ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste tworzące ciąg arytmetyczny, to $9p^2 = 100q$.

8

8

$$\boxed{a, aq, aq^2}$$

$$b^2 = ac$$

$$a, aq \in \mathbb{Z}$$

niepłe

Zadanie 8.27. [matura, czerwiec 2018, zad. 10. (4 pkt)]

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2) , którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz aq tego ciągu.

$$a, aq, aq^2 - 4 - \text{c. aryt.}$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ 2aq = a + aq^2 - 4 \end{array}$$

$$\boxed{aq^2 - 2aq + a = 4}$$

$$a(q^2 - 2q + 1) = 4$$

$$\boxed{a(q-1)^2 = 4}$$

$$a, q \in \mathbb{C} \text{ niepł, } h$$

$$\text{I } a=1 \quad (q-1)^2=4 \quad \text{jedyna możliwa}$$

$$\text{II } a=4$$

$$\text{III } a=-1 \Rightarrow (q-1)^2=-4$$

$$a=1$$

$$(q-1)^2=4$$

$$q-1=2 \vee q-1=-2$$

$$\boxed{q=3} \vee \boxed{q=-1}$$

$$\boxed{aq=3} \vee \boxed{aq=-1}$$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} a \cdot b = 8 \\ a, b \in \mathbb{Q}_* \end{array} \right\}}_{\text{link}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ b=8 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} a=2 \\ b=4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a=4 \\ b=2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a=8 \\ b=1 \end{array} \right\}$$

link

Zadanie 8.24. [matura, czerwiec 2017, zad. 10. (5 pkt)]

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorazem ciągu geometrycznego (b_n) . Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n) . Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18. Wyznacz te ciągi.

a_n - ant
 b_n - gert

✓ $a_1 = q_{\text{km}}$ $a_n \in \mathbb{C}$

✓ $S_8 = 124 = a_1 + a_2 + \dots + a_8$

✓ $b_1 = r_{\text{km}}$

✓ $b_1 + b_2 = 18$

$b_1 + b_1 q = 18$

$b_1 + a_1 b_1 = 18$

$a_1 = q$

$b_1 = r$

$b_1 + a_1 b_1 = 18$

$2a_1 + 7b_1 = 31$

$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = (a_1 + a_1 + 7r) \cdot 4 = (2a_1 + 7b_1) \cdot 4 = 124 / :4$

$2a_1 + 7b_1 = 31$

~~BAZAA~~

$\begin{cases} b_1 + a_1 b_1 = 18 \quad | \cdot 2 \\ 2a_1 + 7b_1 = 31 \end{cases}$ r. kł z do m
 r. lin z do m

$2a_1 = 31 - 7b_1$

$2b_1 + (2a_1)b_1 = 36$

$$2b_1 + \overbrace{(2a_1)} b_1 = 36$$

$$2b_1 + b_1(31 - 7b_1) - 36 = 2b_1 - 7b_1^2 + 31b_1 - 36 =$$

$$\boxed{-7b_1^2 + 33b_1 - 36 = 0}$$

$$7b_1^2 - 33b_1 + 36 = 0$$

$$\Delta = 33^2 - 4 \cdot 7 \cdot 36 =$$

$$1089 - 1008 = 81 = \underline{9^2}$$

$$a_1 = \frac{31 - 7b_1}{2} \quad \leftarrow \begin{aligned} b_{1,1} &= \frac{33 - 9}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \\ b_{1,2} &= \frac{33 + 9}{14} = \frac{42}{14} = \underline{3} \end{aligned}$$

$$a_{1,1} = \frac{31 - 12}{2} = \frac{19}{2} \notin \mathbb{C}$$

$$a_{1,2} = \frac{31 - 21}{2} = 5 \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= 3 & q &= 5 \\ a_1 &= 5 & r &= 3 \end{aligned}$$

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 3$$

$$b_n = b_1 \cdot 5^{n-1} = \underline{3 \cdot 5^{n-1}}$$

↓ 18 min

Zadanie 8.14. [matura, czerwiec 2015, zad. 7 swe. (6 pkt)]

Trzy liczby, których suma jest równa 105, są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Pierwsza z tych liczb jest jednocześnie pierwszym, druga szóstym, a trzecia dwudziestym szóstym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz te liczby.

$$a + b + c = 105$$

$$a < b < c$$

a, b, c - c. geom $\Leftrightarrow$

$$b^2 = a \cdot c$$

$$a = a_1 \rightarrow$$

$$b = a_6 = a_1 + 5r$$

$$c = a_{16} = a_1 + 15r$$

$$\left. \begin{array}{l} b = a + 5r \\ c = a + 15r \end{array} \right\}$$

$$5r = b - a$$

R. l.

R. l

R. kw

$$\left\{ \begin{array}{l} c - a = 5b - 5a \\ a + b + c = 105 \\ b^2 = a \cdot c \end{array} \right.$$

$$c = 5b - 4a$$

$$a + b + 5b - 4a = 105$$

$$6b - 3a = 105 \quad | :3$$

$$2b - a = 35$$

$$a = 2b - 35$$

$$\begin{aligned} c &= 5b - 4a \\ c &= -3b + 140 \end{aligned}$$

$$b^2 = (2b - 35)(-3b + 140)$$

$$b^2 = -6b^2 + 385b - 35 \cdot 140$$

$$7b^2 - 385b + 35 \cdot 140 = 0$$

$$b^2 - 55b + 700 = 0$$

$$35 \cdot 20$$

$$(b - 35)(b - 20) = 0$$

$$\underbrace{b = 35} \quad \underbrace{b = 20}$$

Zadanie 8.23. [matura, czerwiec 2017, zad. 5. (1 pkt)]

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, w którym iloraz jest trzy razy większy od pierwszego wyrazu, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{4}$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{3}{7}$

B. $\frac{1}{7}$

C. $\frac{7}{3}$

D. 7

$$q = 3a_1$$

$$a_1 = \frac{1}{7}$$

$$S_n = \frac{1}{4} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad n \rightarrow \infty \quad S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{a_1}{1-3a_1}$$

$$4a_1 = 1 - 3a_1$$
$$a_1 = \frac{1}{7}$$

Zadanie 8.16. [matura, maj 2016, zad. 8. (2 pkt)]

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$ dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x , dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jest zbieżny.

$$\frac{?}{?} \Rightarrow |q| < 1$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q / : a_n$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_1 = \frac{1}{2x-371}$$

$$a_2 = \frac{1}{(2x-371)^2}$$

$$|q| = \frac{1}{|2x-371|} < 1 \quad |2x-371| > 0$$

$$2x-371 > 1 \vee 2x-371 < -1$$

$$x > 186 \vee x < 185$$

$$S(a,b) \quad r \geq a$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{f (x,y)}$$

Zadanie 8.28. [matura, czerwiec 2018, zad. 11. (4 pkt)]

Dany jest nieskończony ciąg okręgów (o_n) o równaniach $x^2 + y^2 = 2^{11-n}$, $n \geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} wewnętrznym okręgiem o_{2k} .

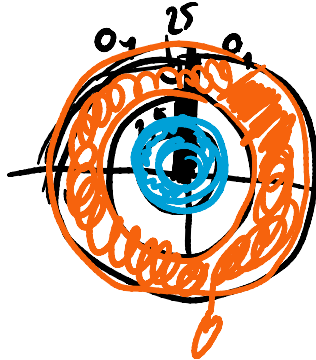
Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k , gdzie $k \geq 1$.

$$O_n: x^2 + y^2 = 2^{11-n}$$

$$O_1: x^2 + y^2 = 2^{10}$$

$S(0,0) \quad r = \sqrt{2^{10}} = 2^5$

$P_1 = O_1$
 $P_1 = O_2$



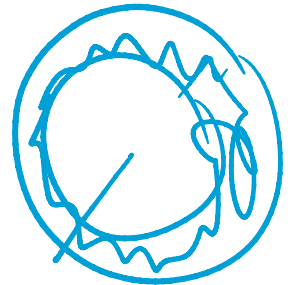
$$O_2: x^2 + y^2 = 2^9$$

$$S(0,0) \quad r = \sqrt{2^9} = (2^9)^{\frac{1}{2}} = 2^{4,5}$$

$$x_{ij} = 2^8$$

$$S(0,0) \quad n=2^4$$

$$P_1 = P_{K_1} - P_{K_2} = 11 \cdot 2^{10} - 11 \cdot 2^9 = 11 \cdot 2^9 (2 - 1) = 11 \cdot 2^9$$



$$P_2 = P_{03} - P_{01} = \pi \cdot n_3^2 - \pi n_1^2 = \underline{\pi \cdot 2^8} - \underline{\pi \cdot 2^7} = \pi \cdot 2^7$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots = \pi \cdot 2^9 + \pi \cdot 2^7 + \pi \cdot 2^5 + \dots$$

$$q = 2^{-2} \quad a_1 = \pi \cdot 2^9$$

$$C \frac{\pi \cdot 2^9}{2} = \pi \cdot 2^9 \quad 6 = 9 \quad | - 2^{11} |$$

$$S = \frac{\pi \cdot 2^9}{1 - 2^{-2}} = \frac{\pi \cdot 2^9}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^9 = \underline{\underline{\frac{1}{3} \pi \cdot 2^{11}}}$$

poniedziałek, 20 grudnia 2021 17:40

2021-12-20

środa, 15 grudnia 2021 18:12

$$1 \rightarrow 3 \quad 2 \rightarrow 4 \quad \text{--- } n=100$$

4.19. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{1+3+5+7+9+\dots+(2n+3)}{4n-7}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$. Które wyrazy tego ciągu są równe 4?

$$a_n = 4$$

$$a_1 = \frac{1+3+5}{-3} = -3$$

$$\begin{array}{c} 2n+3 \\ \uparrow \\ n=1 \\ \boxed{5} \end{array}$$

$$a_2 = \frac{16}{8-7} = \frac{16}{1} = 16$$

$$\frac{1+2n+3}{2} (n+2)$$

$$a_n = \frac{(n+2)^2}{4n-7} = 4$$

$$n^2 + 4n + 4 = 16n - 28$$

$$n^2 - 12n + 32 = 0$$

$$(n-8)(n-4) = 0$$

$$\boxed{n=8} \vee \boxed{n=4}$$

$$\boxed{a_4 = 4} \vee \boxed{a_8 = 4}$$