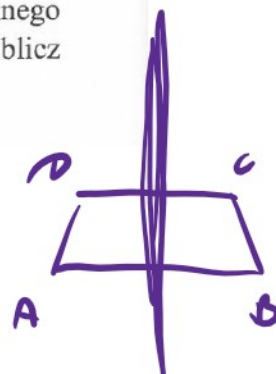
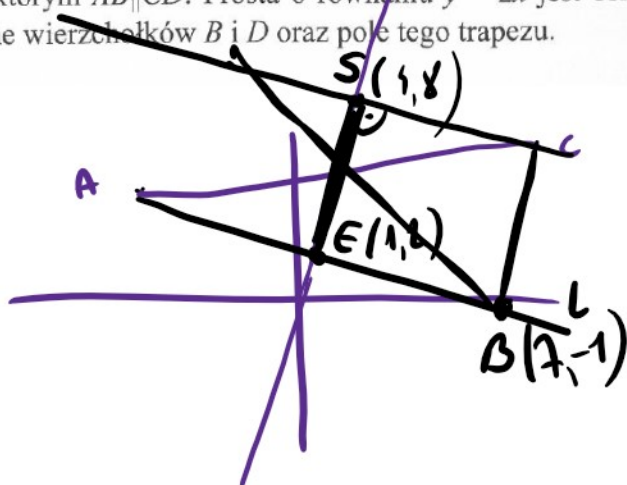


Zadanie 7.4. [matura, czerwiec 2011, zad. 8. (5 pkt)]

Punkty $A = (-5, 5)$, $C = (8, 6)$ są przeciwległymi wierzchołkami trapezu równoramiennego $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Prosta o równaniu $y = 2x$ jest osią symetrii tego trapezu. Oblicz współrzędne wierzchołków B i D oraz pole tego trapezu.



$$1) L \perp K$$

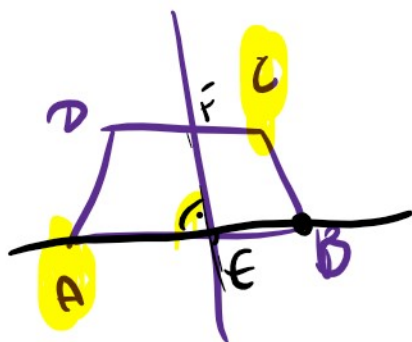
$$A \in L$$

$$L: y = -\frac{1}{2}(x+5) + 5 = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

$$2) S \in K \cap L$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{x = 1}$$



$$S = \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right) = (1, 2)$$

$$m: \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 10 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$(4, 8) =$$

$$x = 4 \quad y = 8$$

Zadanie 7.19. [matura, maj 2017, zad. 3. (5 pkt)]

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-5, 3)$ i $B = (0, 6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$.

$$S(a, b) \quad r > 0$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$a, b, r = ?$$

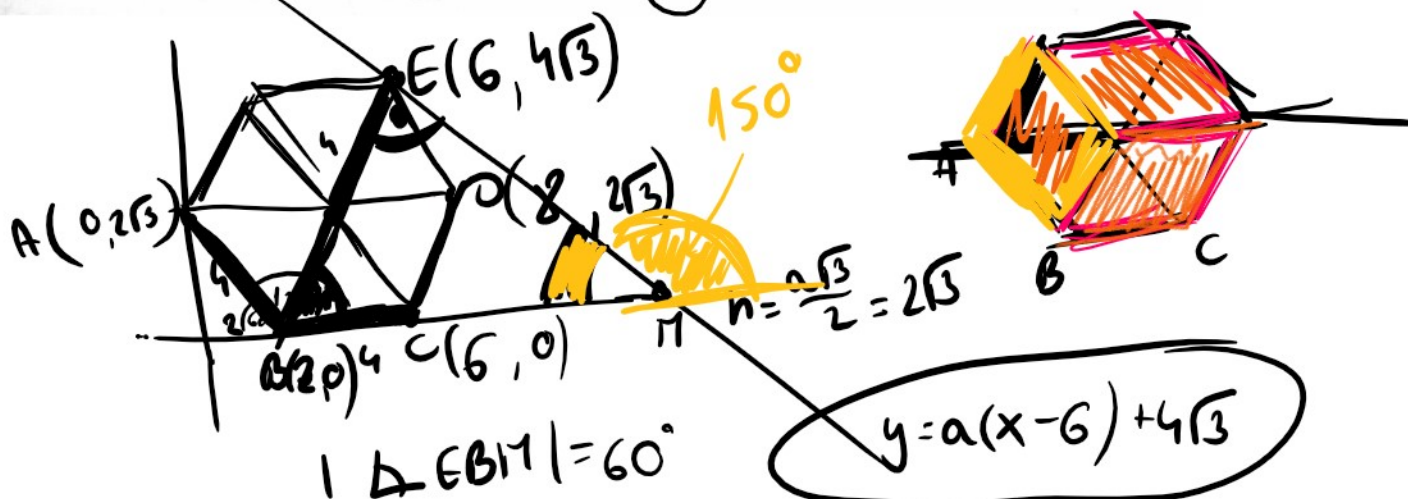
$$S \in x - 3y + 1 = 0$$

$$a = 3b - 1$$

$$\begin{cases} (4+3b)^2 + (3-b)^2 = r^2 \\ (1-3b)^2 + (6-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Zadanie 7.8. [matura, maj 2014, zad. 8. (4 pkt)]

Punkty A, B, C, D, E, F są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego, przy czym $A = (0, 2\sqrt{3})$, $B = (2, 0)$, a C leży na osi Ox . Wyznacz równanie stycznej do okręgu opisanego na tym sześciokącie przechodzącej przez wierzchołek E .



a
 $\frac{1}{4}$
 $\tan 150^\circ =$
 $\tan(180^\circ - 30^\circ)$
 $\tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ$
 $-\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$y = ax + b$
 $a = \tan \alpha$
 $\alpha = 150^\circ$
 $a = \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$

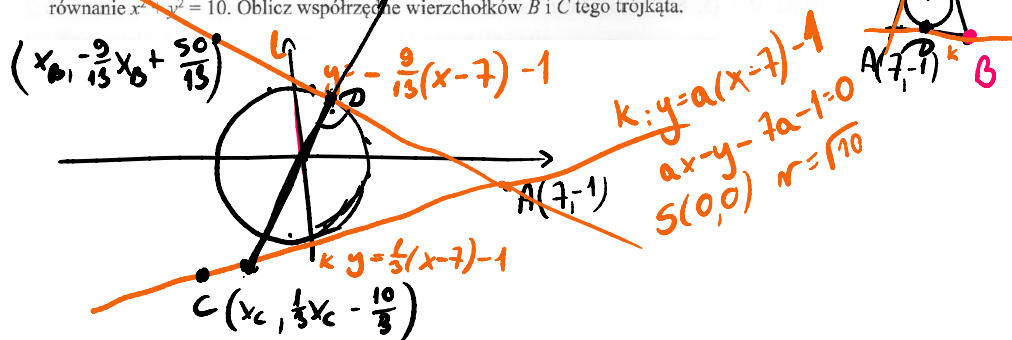
$$x_c < 0$$

$$y_c < 0$$

$$C \in III \text{ ćw}$$

Zadanie 7.22. [matura, maj 2018, zad. 14. (6 pkt)]

Punkt $A = (7, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC , w którym $|AC| = |BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2 + y^2 = 10$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.



$$\sqrt{10} = \frac{|-7a-1|}{\sqrt{a^2+1}}$$

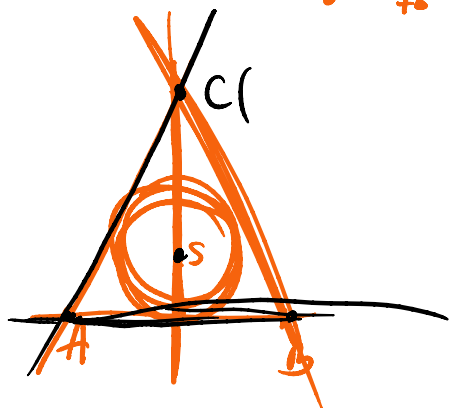
$$\sqrt{10a^2+10} = |7a+1|$$

$$10a^2+10 = 49a^2+14a+1$$

$$39a^2+14a-9=0$$

$$a_1 = -\frac{54}{78} = -\frac{27}{39} = -\frac{9}{13}$$

$$a_2 = \frac{26}{78} = \frac{1}{3}$$



$$m \perp l \Rightarrow y = \frac{13}{9}(x-0)+0$$

$$C \in \boxed{y = \frac{13}{9}x}$$

$$y = \frac{13}{9}x$$

$$\frac{13}{9}x_c = \frac{1}{3}x_c - \frac{10}{3}$$

$$\frac{10}{9}x_c = -\frac{10}{3}$$

$$x_c = -3$$

$$y_c = -\frac{13}{3}$$

$$C(-3; -\frac{13}{3})$$

Zadanie 7.24. [matura, czerwiec 2018, zad. 13. (5 pkt)]

Wierzchołki A i B trójkąta prostokątnego ABC leżą na osi Oy układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB , BC i CA w punktach – odpowiednio – $P = (0, 10)$, $Q = (8, 6)$ i $R = (9, 13)$. Oblicz współrzędne wierzchołków A , B i C tego trójkąta.

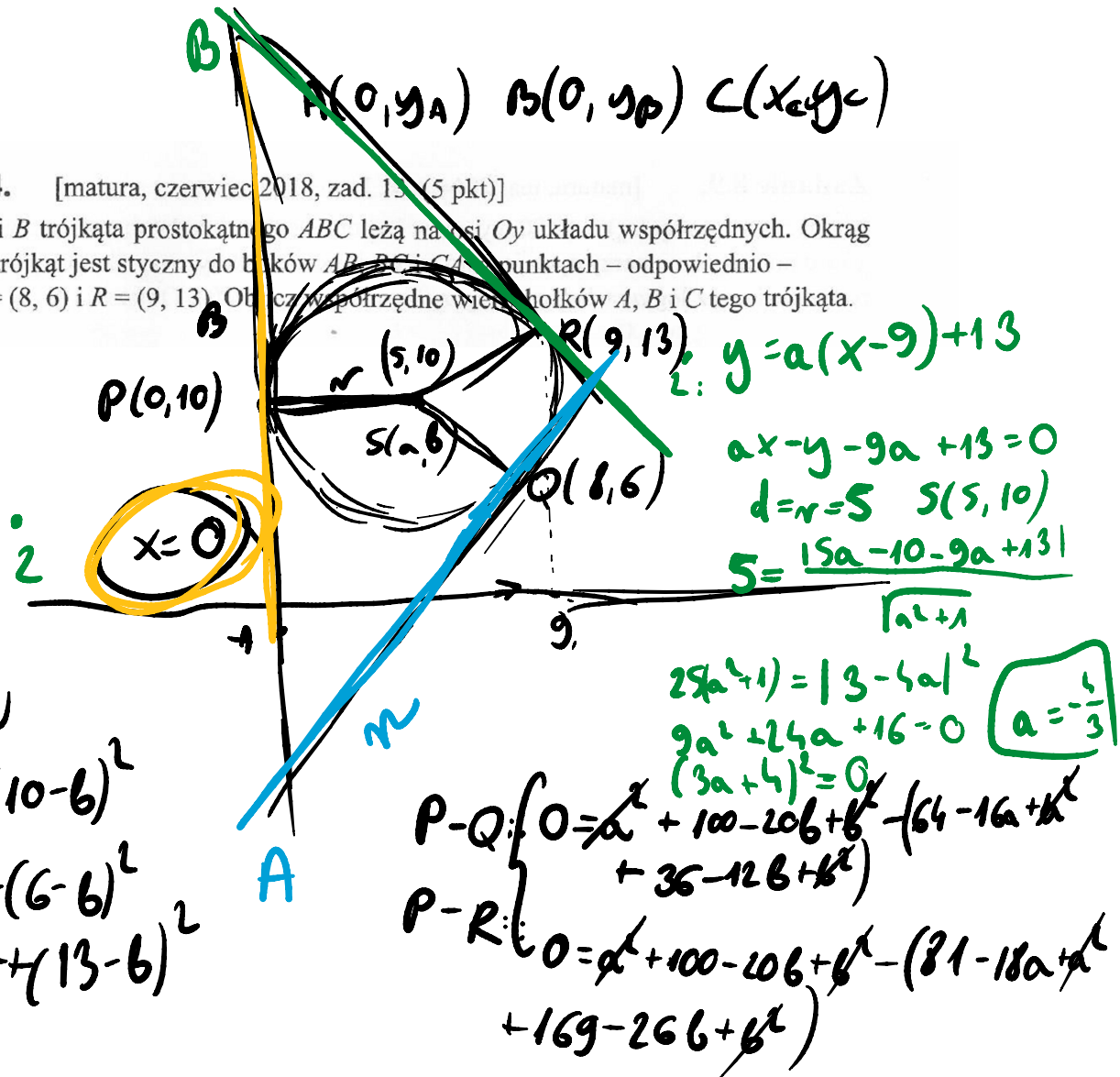
U
P

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{3} \\ y_2 &= -\frac{13}{3} \end{aligned}$$

$$4 - 5 + 3 = 2$$

Zadanie 7.24. [matura, czerwiec 2018, zad. 13 (5 pkt)]

Wierzchołki A i B trójkąta prostokątnego ABC leżą na osi Oy układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB , BC i CA w punktach – odpowiednio – $P = (0, 10)$, $Q = (8, 6)$ i $R = (9, 13)$. Oblicz współrzędne wierzchołków A , B i C tego trójkąta.



$$\begin{aligned} r^2 &= (0-a)^2 + (10-b)^2 \\ r^2 &= (8-a)^2 + (6-b)^2 \\ r^2 &= (9-a)^2 + (13-b)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 100 - 20b - 64 + 16a - 36 + 12b = 0 \\ 100 - 20b - 81 + 18a - 169 + 26b = 0 \end{cases}$$

$$b = 2a$$

$$6b + 18a - 150 = 0$$

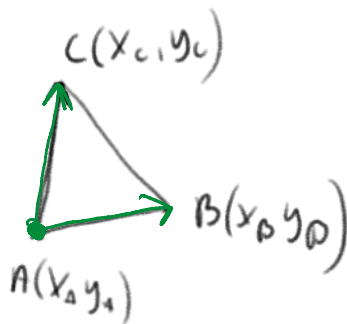
$$b + 3a - 25 = 0$$

$$\begin{aligned} 5a &= 25 \\ a &= 5 \\ b &= 10 \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{(0-a)^2 + (10-b)^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5 > 0$$

$$\begin{pmatrix} \vec{CA} \\ \vec{CB} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{BC} \\ \vec{BA} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{BA} \\ \vec{BC} \end{vmatrix}$$



$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$$

$$\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = W = \begin{vmatrix} \vec{AB} \\ \vec{AC} \end{vmatrix} =$$

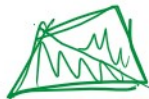
$$W = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\text{"} \det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} \underline{x_B - x_A} & \underline{y_B - y_A} \\ \underline{x_C - x_A} & \underline{y_C - y_A} \end{vmatrix}$$

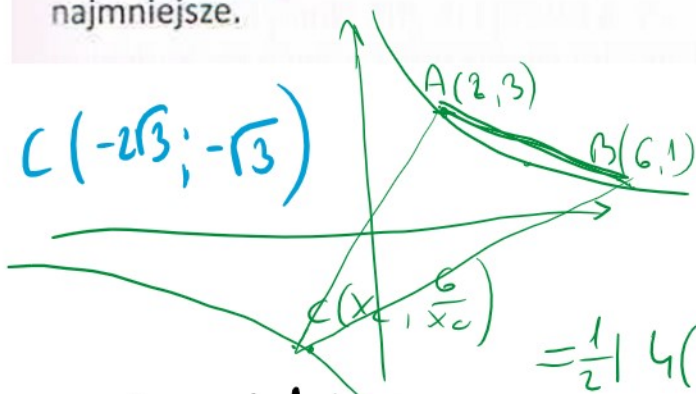
τ_{AB} str 7

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \left| (x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - (y_B - y_A) \cdot (x_C - x_A) \right|$$



3.194. Na hiperboli o równaniu $y = \frac{6}{x}$, gdzie $x \neq 0$, obrano punkty $A(2, 3)$ i $B(6, 1)$.

Wyznacz na tej hiperboli taki punkt C o ujemnej odciętej, aby pole trójkąta ABC było najmniejsze.



$x_c < 0$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{AB} \\ \vec{AC} \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 4, -2 \\ x_c - 2, \frac{6}{x_c} - 3 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} | 4(\frac{6}{x_c} - 3) + 2(x_c - 2) | = | \frac{12}{x_c} - 6 + x_c - 2 | =$$

do pochodnej nie ma

$$P = \left| \frac{12}{x_c} + x_c - 8 \right| = -\frac{12}{x_c} - x_c + 8$$

$$\left(12 \cdot \frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{12}{x}\right)' = 12(x^{-1})' = 12 \cdot (-x^{-2}) = -\frac{12}{x^2}$$

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$$

$$\left(\frac{12}{x}\right)' = \left(-\frac{12}{x^2}\right)$$

$$P(x) = -\frac{12}{x} - x + 8$$

$x < 0$

$$P'(x) =$$

$$P'(x) = \frac{12}{x^2} - 1 = \left(\frac{12 - x^2}{x^2}\right)$$

UK

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12 - x^2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{12} \vee x = \sqrt{12}$$

$$x = -2\sqrt{3} \in \mathbb{R}_-$$

WL



x	$(-\infty, -2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3}, 0)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$y_{\min}$ " $f(-2\sqrt{3})$	$\nearrow$

1

$\Rightarrow$

U''

$f(-2\sqrt{3})$

11

Zadanie 8.24. [matura, czerwiec 2017, zad. 10. (5 pkt)]

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorazem ciągu geometrycznego (b_n) . Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n) . Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18. Wyznacz te ciągi.

a_n - const

b_n - c geom

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = 124$$

$$(q + q + 7r)4 = 124$$

$$2q + 7r = 31$$

$$\begin{cases} 2q + 7r = 31 \\ r + rq = 18 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$2r + 2qr = 36$$

$$2r + 31r - 7r^2 = 36$$

$$2q = 31 - 7r$$

$$a_n \in \mathbb{C}$$

$$q = a_1$$

$$S_8 = 124 = a_1 + a_2 + \dots + a_8$$

$$b_1 = r$$

$$b_1 + b_2 = 18 \Leftrightarrow b_1 + b_1 q = 18$$

$$r + rq = 18$$

$$7r^2 - 33r + 36 = 0$$

$$\Delta = 1089 - 1008 = 81 = 9^2$$

$$r_1 = \frac{33 - 9}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \notin \mathbb{D}$$

$$r_2 = \frac{33 + 9}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

$$\begin{cases} 2q = 10 \\ q = 5 \end{cases}$$

c. arytm.

c. geometryczny

$$a_{m+1} = a_m + r$$

r - różnica
c. arytm.

$$r = a_{m+1} - a_m$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

$$a_m = a_k + (m-k) \cdot r$$

$$a_m = \frac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2}$$



$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = a_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$(1^n - q^n) = (1-q)(1^{n-1} + 1^{n-2}q + 1^{n-3}q^2 + \dots + 1 \cdot q^{n-2} + q^{n-1})$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$(1-q^n) = (1-q)(1+q+q^2+\dots+q^{n-1})$$

$$S = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$a_{m+1} = a_m \cdot q$$

q - iloraz ciągu

$$q = \frac{a_{m+1}}{a_m}$$

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & q = 1 \end{cases}$$

$$a_m = a_k \cdot q^{n-k}$$

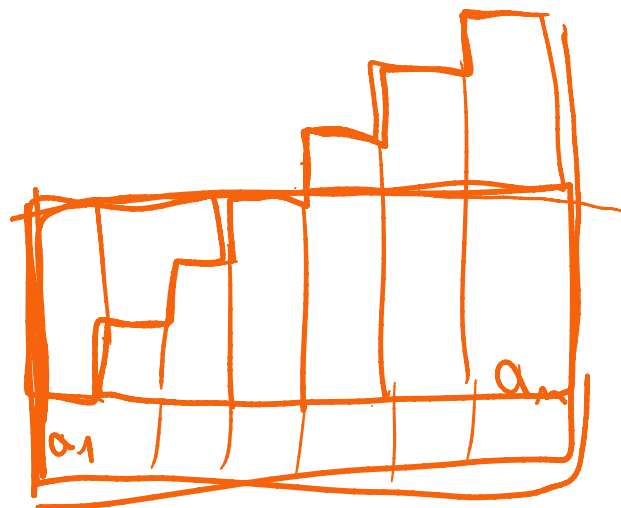
$$a_m^2 = a_{m-k} \cdot a_{m+k}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \leftarrow \quad \text{---}$$

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \boxed{q \neq 1} \\ n \cdot a_1 & \boxed{q = 1} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} a_1 \\ \downarrow \\ \underbrace{2+2+2+\dots+2}_{10} = \\ 10 \cdot 2. \end{array}$$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$



Zadanie 8.26. [matura, maj 2018, zad. 2 swe. (5 pkt)]

Liczby a, b, c , spełniające warunek $3a + b + 3c = 77$, są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Ciąg $(a, b+1, 2c)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a, b, c oraz podaj wyrazy ciągu geometrycznego.

$$\begin{cases} a, b, c - \text{c.a.} \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2} \\ 3a + b + 3c = 77 \\ a, b+1, 2c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3(a+c) + \frac{a+c}{2} &= 77 \\ 6(a+c) + (a+c) &= 77 \cdot 2 \\ 7(a+c) &= 77 \cdot 2 \quad | :7 \\ a+c &= 22 \end{aligned}$$

$b = 11$

$$a, 12, 2c \Leftrightarrow 12^2 = a \cdot c \Rightarrow a \cdot c = 12 \cdot 6 = 72$$

$$\begin{cases} a+c=22 \\ a \cdot c=72 \end{cases}$$

$$c = 22 - a$$

$$a(22-a) = 72 \quad (a-4)(a-18) = 0$$

$$a^2 - 22a + 72 = 0$$

$a = 4$	$a = 18$
$b = 11$	$b = 11$
$c = 18$	$c = 4$

Zadanie 8.27. [matura, czerwiec 2018, zad. 10. (4 pkt)]

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2) , którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz aq tego ciągu.

$$\boxed{a, aq, aq^2} - \text{cg. geot.}$$

$$a_n \in \mathbb{C}$$

a_n - nieparzyste.

$$\underline{a, aq, aq^2 - 4} - \text{cg. art.}$$

$$(aq = 1)$$

$$aq^2 = a \cdot q^2$$

$$4 = 0$$

$$aq = \frac{a + aq^2 - 4}{2}$$

$$aq^2 + a - 2aq - 4 = 0$$

$$a, q \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{a(q^2 - 2q + 1) = 4}$$

$$a \cdot (q-1)^2 = 4$$

$$1 \cdot 4 = 4$$

$$-1 \cdot (-4) = 4$$

a - nieparzyste

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \cancel{2} & \cancel{4} \\ \swarrow & \searrow \\ \cancel{-2} & \cancel{-4} \end{array}$$

$$\boxed{a = -1} \Rightarrow (q-1)^2 = -4 \quad \text{sprzeczne}$$

$$a = 1 \Rightarrow (q-1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{array}{ll} q-1 = 2 & \vee \quad q-1 = -2 \\ q = 3 & \vee \quad q = -1 \end{array}$$

$$q=3 \quad \vee \quad q=-1$$

$$(1, 3, 9) \vee (1, -1, 1)$$

$$\underline{(1, 3, 5)} \quad \underline{(1, -1, -3)}$$

2021-12-21

wtorek, 21 grudnia 2021 16:58

2021-12-21

wtorek, 21 grudnia 2021 16:58

wtorek, 21 grudnia 2021 16:58