

468. Oblicz $\log_{abc} p$ wiedząc, że $\log_a p = 2$, $\log_b p = 3$, $\log_c p = 6$ i $abc \neq 1$.

$$\log_{abc} p = \frac{1}{\log_p abc} = 1$$

470. R Uzasadnij, że liczby $2^{\log_3 5}$ i $5^{\log_3 2}$ są równe.

L70 P70

$$2^{\log_3 5} = 5^{\log_3 2} / \log_3 ()$$

$$c = \frac{\log^3 4 + \log^3 25}{4 \cdot (\log^2 2 - \log 2 \cdot \log 5 + \log^2 5)}$$

$$\log^3 4 = (\log 4)^3 = (2 \log 2)^3$$

$$(\log 25)^3 =$$

484. Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = \log_2 \frac{x^2 - 9}{|x| - 3}$.

$$; \log(|x| + 3)$$

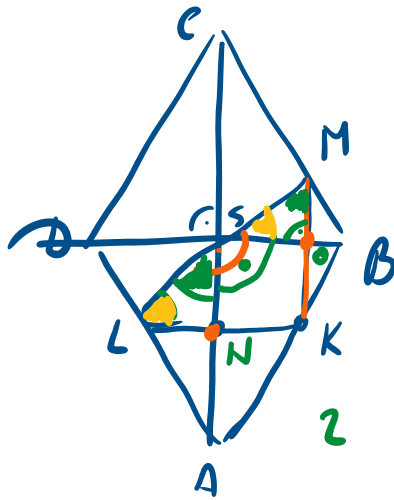
$$\text{D: } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

- ✓ a) Wyznacz dziedzinę funkcji g .
- ✓ b) **W** Przekształcając wykres funkcji $f(x) = \log_2 x$, naszkicuj wykres funkcji g .
- c) Sporządź wykres funkcji, która każdej liczbie rzeczywistej m przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $g(x) = m$.

$$\frac{x^2 - 9}{|x| - 3} = \frac{|x|^2 - 9}{|x| - 3} = |x| + 3$$

prostokąty.

33. Na bokach AB , AD i BC rombu $ABCD$ wybrano odpowiednio punkty K , L i M w ten sposób, że odcinki KL i KM są równoległe do przekątnych rombu. Wykaż, że odcinek LM przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych rombu.



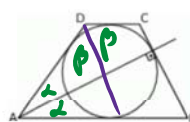
$$T: S \in LM \Leftrightarrow \angle LSM = 180^\circ$$

$$D: \angle LKM = 90^\circ$$

$$|\angle LSN| = |\angle LMK|$$

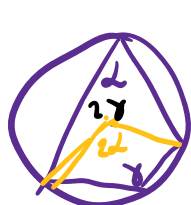
$$|\angle MSB| = 1$$

//



34. W trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$; $|AB| > |CD|$, wpisano okrąg (patrz rysunek).

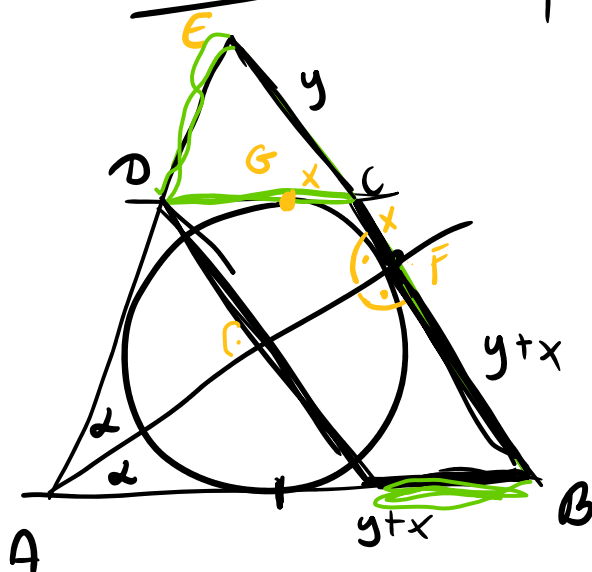
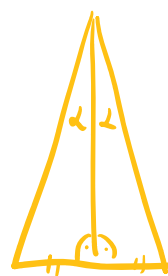
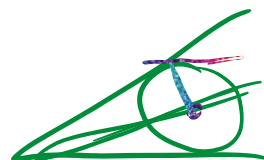
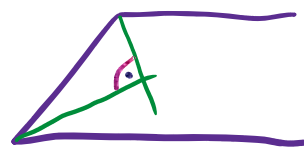
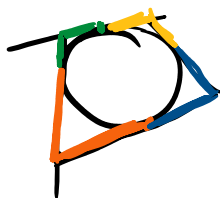
Dwusieczna kąta ostrego przy wierzchołku A jest prostopadła do ramienia BC . Wykaż, że dwusieczna kąta przy wierzchołku D jest równoległa do ramienia BC . Oblicz $|BC| : |DC|$.



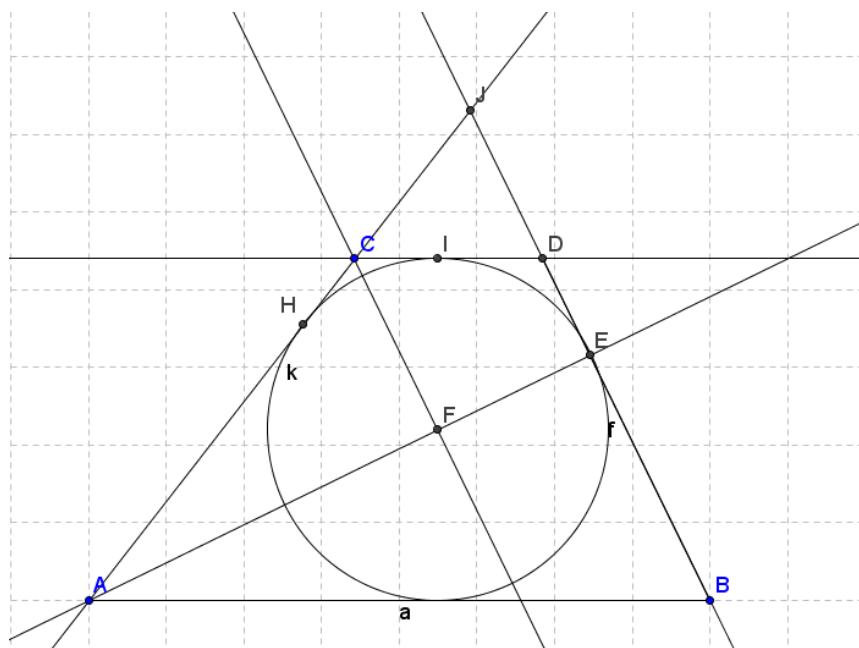
$$2\alpha + 2\gamma = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$$

$$2\alpha + 2\gamma = 180^\circ$$



$$\frac{BC}{DC}$$



Niech

$$HC = x = CI$$

$$ID = y = DE$$

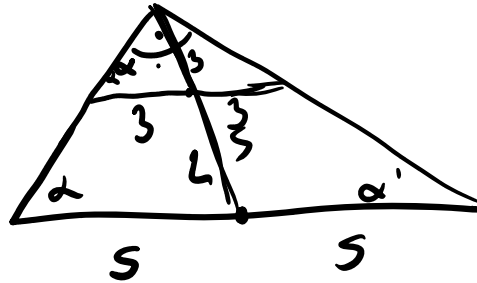
=>

$$JH = JE = BE = x + x + y$$

$$BD = x + x + y + y = 2(x + y) = 2DC$$

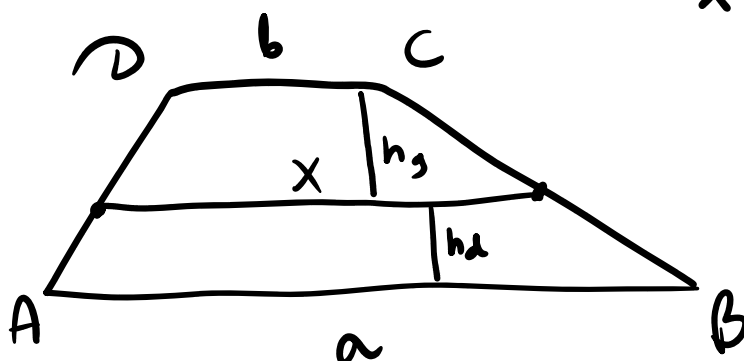
$$BD : CD = 2 : 1$$

35. Podstawy trapezu mają długości 10 i 6. Wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie jest równa 90° , oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw trapezu.



36. Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $AB = a$ i $CD = b$. Na ramionach trapezu wybrano punkty K i L w ten sposób, że odcinek KL jest równoległy do podstaw i dzieli trapez na dwa trapezy o równych polach. Oblicz długość odcinka KL .

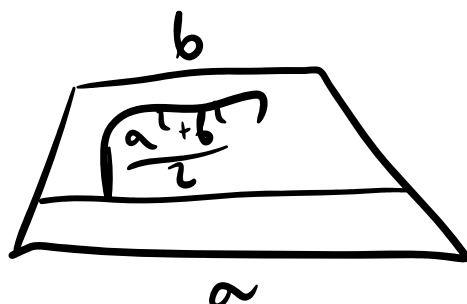
$$x = ?$$



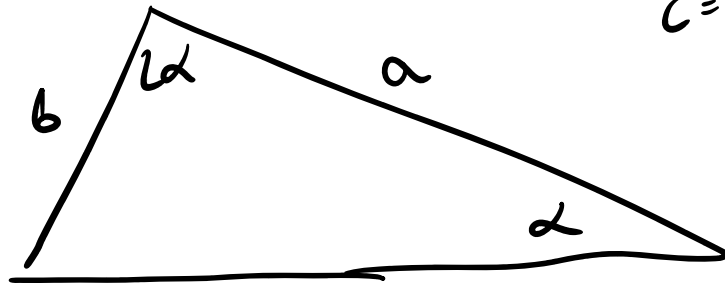
$$\frac{\frac{1}{2}P_d}{\frac{1}{2}P_d} = \frac{\frac{a+x}{2} \cdot h_1}{\frac{b+x}{2} \cdot h_2}$$

$$/ : h_2$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(1 + \frac{a+x}{b+x}\right) = \frac{a+x}{2} + \frac{x+b}{2} \cdot \frac{a+x}{b+x} \quad / (b+x) \cdot 2$$



37. Dane są długości boków a i b trójkąta. Znajdź długość trzeciego boku, jeżeli kąt leżący naprzeciw tego boku jest dwa razy większy od kąta leżącego naprzeciw boku b .



$c = ?$

D: a, b

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin 3\alpha}$$

$$c = \frac{\sin 2\alpha \cdot b}{\sin \alpha} = 2b \cos \alpha$$

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha =$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{(a+b) \cdot b}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{a+b}{b}}$$

$$\sqrt{\frac{a+b}{b}} = \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b}}$$

4.97. Ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których zapisie cyfra 2 występuje trzy razy, cyfrą dziesiątek jest 7, a pozostałe cyfry są różne i inne niż wymienione cyfry?

4.98. Stonoga – wbrew nazwie – ma tylko siedem par nóg. Na nogi ma włożyć siedem par kaloszy (każda para jest w innym kolorze). Na ile sposobów może to zrobić, jeśli:

- a) nie rozróżnia kolorów ani butów lewych i prawych
- b) rozróżnia kolory (na każdą parę nóg włoży buty w tym samym kolorze), lecz nie rozróżnia butów lewych i prawych
- c) nie rozróżnia kolorów, lecz rozróżnia buty lewe i prawe
- d) rozróżnia kolory i rozróżnia buty lewe i prawe?

4.99. W przedziale wagonu kolejowego jest osiem numerowanych miejsc (w dwóch rzędach naprzeciwko siebie). Do przedziału weszły cztery osoby. Na ile sposobów mogą one zająć miejsca w tym przedziale, tak aby:

- a) w każdym rzędzie siedziały po dwie osoby naprzeciwko osób siedzących w drugim rzędzie

K2 m blab

part $P+$
kolejko $K+$

6249

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 8 & 30 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 5,1,8,30 \\ \hline \end{array}$$

$K-$

{1, ..., 100}

$$(5,8) \neq (8,5)$$

$$(5,5) \text{ OK } P+$$

$$\binom{100}{1} = 100$$

22100
 $K-$
 $P-$

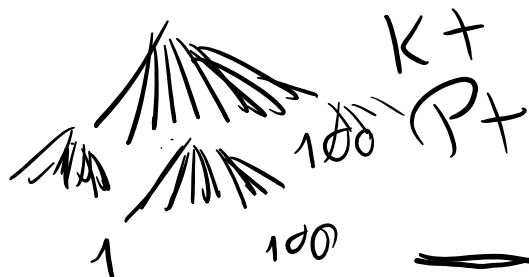
$\binom{100}{2}$

$K-$
 $P-$

22100

$\rightarrow 100$

$$\{1 \dots 100\}$$

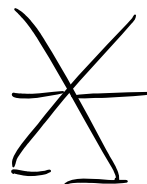


$$(5,8) \neq (8,5) \quad K+$$

$$(5,5) \text{ ok } P+$$



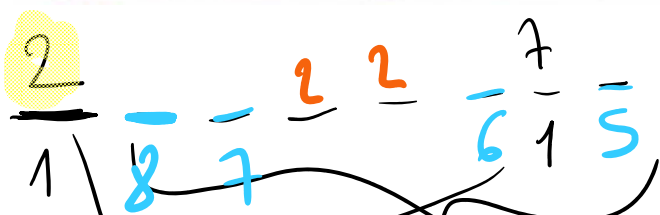
$$\begin{pmatrix} 100 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$\overline{100} \cdot \overline{100} = \boxed{\overline{A} = 100^2}$$

$$\overline{100} \cdot \overline{99}$$

4.97. Ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których zapisie cyfra 2 występuje trzy razy, cyfrą dziesiątek jest 7, a pozostałe cyfry są różne i inne niż wymienione cyfry?



I

3x(2)

0,1 ~~X~~ ~~X~~ 9

↓ wybór 2 miejsc - 16 dla 2 identycznych cyfr

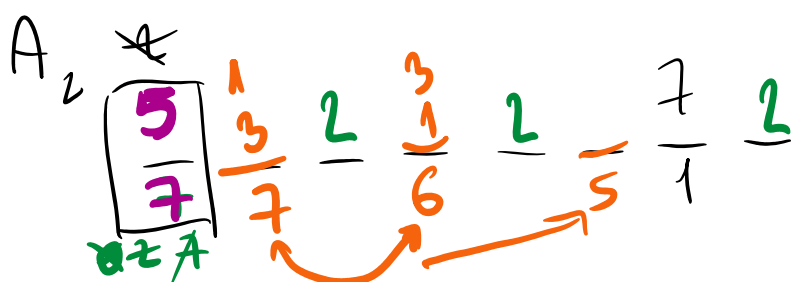
$$\bar{A}_1 = 1 \cdot 1 \cdot \binom{6}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$V_m^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{8!}{(8-4)!}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8!}{4!}$$

$$W_{100}^2 = 100^2 \cdot W_m^k = n^k$$

$$\bar{A}_1 + \bar{A}_2$$



3x(2)

$$\bar{A}_2 = 1 \cdot \binom{6}{3} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$V_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!}$$

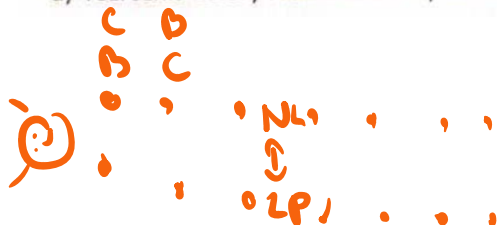
$$\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2$$

4.98. Stonoga – wbrew nazwie – ma tylko siedem par nóg. Na nogi ma włożyć siedem par kałoszy (każda para jest w innym kolorze). Na ile sposobów może to zrobić, jeśli:

- nie rozróżnia kolorów ani butów lewych i prawych
- rozróżnia kolory (na każdą parę nóg włoży buty w tym samym kolorze), lecz nie rozróżnia butów lewych i prawych
- nie rozróżnia kolorów, lecz rozróżnia buty lewe i prawe
- rozróżnia kolory i rozróżnia buty lewe i prawe?

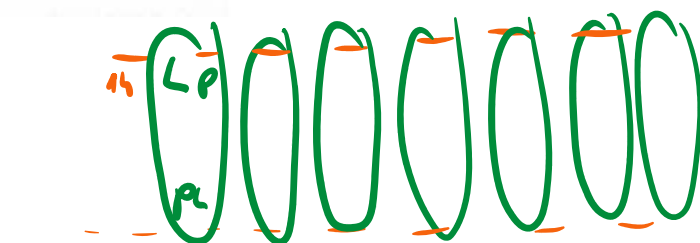
$$\bar{A} = 14!$$

$$P_{14} = 14!$$



$$a) \bar{A} =$$

$$b) \bar{B} =$$



$$\bar{B} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \dots}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 7! \cdot 2^7$$

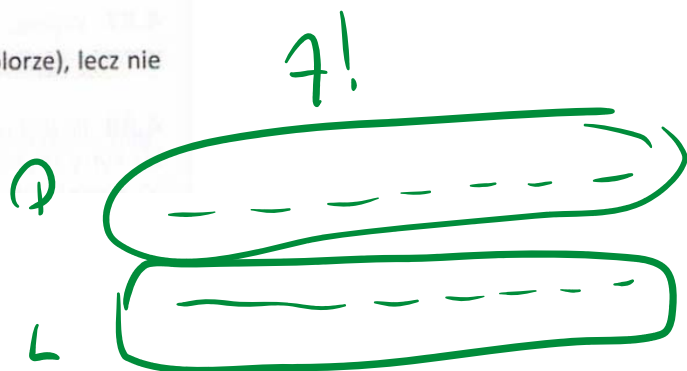
Wybór 1 pary z 7

4.98. Stonoga – wbrew nazwie – ma tylko siedem par nóg. Na nogi ma włożyć siedem par kałoszy (każda para jest w innym kolorze). Na ile sposobów może to zrobić, jeśli:

- nie rozróżnia kolorów ani butów lewych i prawych
- rozróżnia kolory (na każdą parę nóg włoży buty w tym samym kolorze), lecz nie rozróżnia butów lewych i prawych
- nie rozróżnia kolorów, lecz rozróżnia buty lewe i prawe
- rozróżnia kolory i rozróżnia buty lewe i prawe?

$$1P \ 1L \quad 2P \ 2L \quad \dots \quad 7P \ 7L$$

$$\bar{C} = 7! \cdot 7! = (7!)^2$$



4.99. W przedziale wagonu kolejowego jest osiem numerowanych miejsc (w dwóch rzędach naprzeciwko siebie). Do przedziału weszły cztery osoby. Na ile sposobów mogą one zająć miejsca w tym przedziale, tak aby:

a) w każdym rzędzie siedziały po dwie osoby naprzeciwko osób siedzących w drugim rzędzie

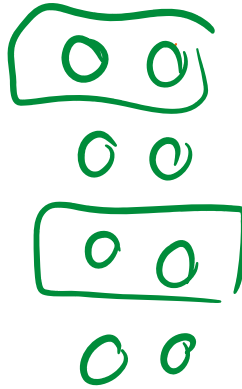
I

II

$$\overline{8 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1} + \overline{8 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{8 \cdot 6 \cdot 3}$$

po 2 osoby

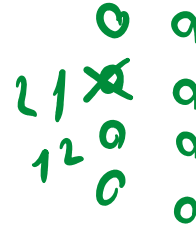
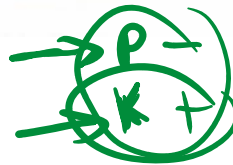
sp. II



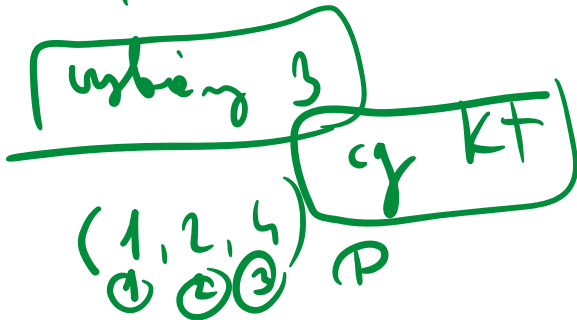
$$\binom{4}{2} \cdot 4! = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 4! = 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = \boxed{6 \cdot 8 \cdot 3}$$

b) trzy ustalone osoby siedziały przodem do kierunku jazdy, czwarta – naprzeciwko jednej z trzech osób?

$$\sqrt[3]{4}$$



1, 2, 3, 4.



1, 2, 3, 4, 5, 6

$$\begin{array}{c} P+ \\ (3, 3, 4) \\ \hline K+ \end{array} \quad W_6^3 = 6^3$$

$$\begin{array}{c} \boxed{4} \\ \boxed{3} \quad \boxed{3} \quad \overline{6 \cdot 6 \cdot 6} \\ \boxed{6^3} \end{array}$$

$$\overline{\overline{\Omega}} = 36$$

$$\overline{\overline{A}} = 1$$

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{36}}$$

1k

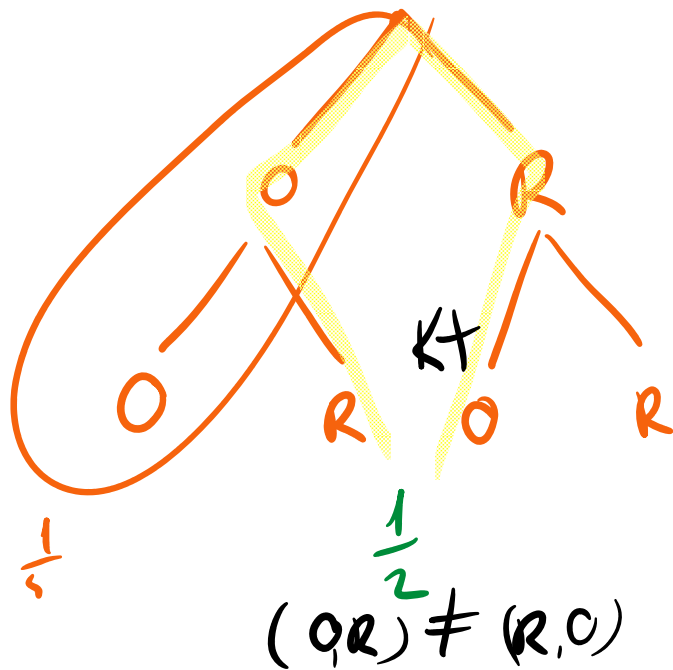
$$2k$$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)			(1,5)	
2	(2,1)					
3						
4						
5					(5,1)	
6						

$$\begin{array}{c} 1 \times \textcircled{1} \\ 1 \times \textcircled{2} \\ \hline K+ \\ (1,2) \neq (2,1) \end{array}$$

2x0 100
1x0 1xR 100
2xR

9
0.95
1

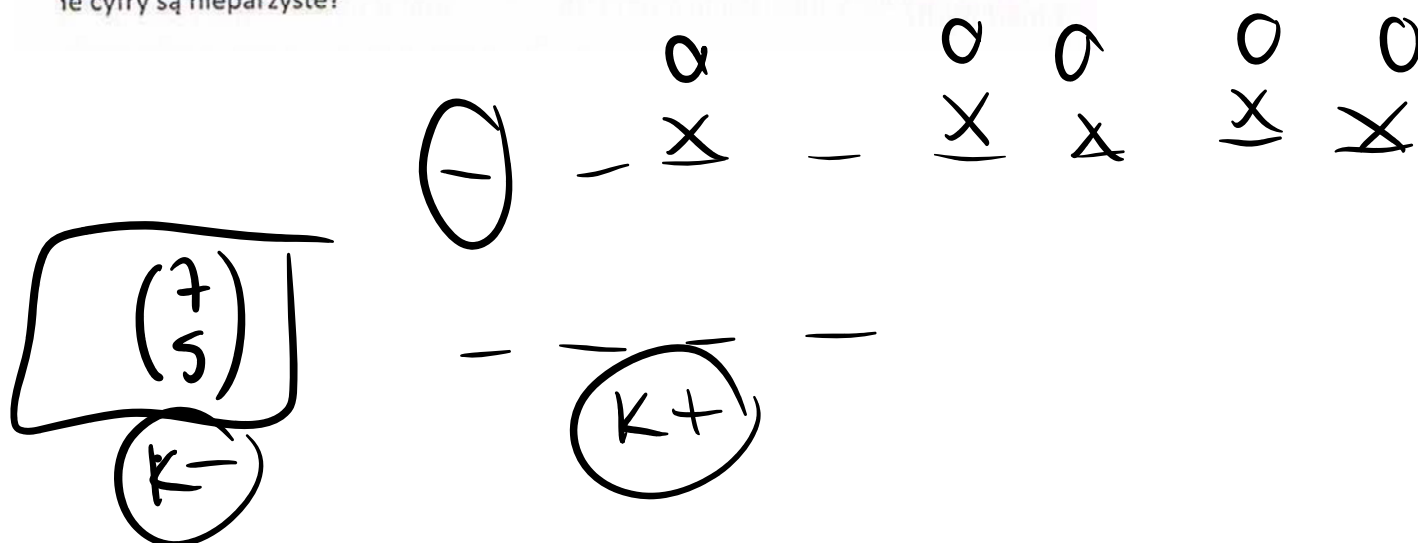


7 7777

4.96. Ile jest liczb pięciocyfrowych, w których zapisie 0 występuje co najwyżej raz, a cyfra jedności jest większa od 6?

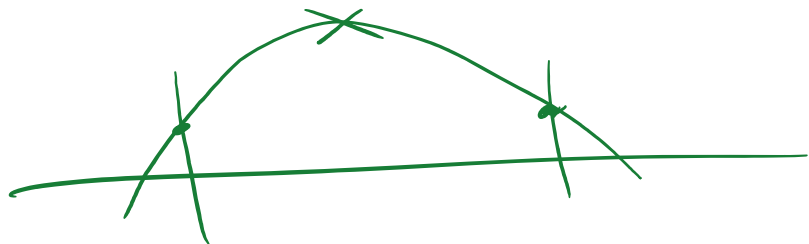
4.97. Ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których zapisie cyfra 2 występuje trzy razy, cyfrą dziesiątek jest 7, a pozostałe cyfry są różne i inne niż wymienione cyfry?

4.95. Ile jest liczb ośmiocyfrowych, w których zapisie 0 występuje 5 razy, a pozostałe cyfry są nieparzyste?



(a, b)

11) $x \in \mathbb{R}$, 5



$$2^k 3^l 5^m 7^n \sim \underline{1} \quad \underline{2} \quad \underline{0} \quad \underline{0}$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \left. \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$3 \cdot$$

$$\underline{2.9}$$

300 ml losowy 2, 300

$$\frac{k}{j} \frac{j}{k}$$

$$\frac{k}{300 \cdot 299} \frac{j}{j'' k}$$

$$(n) \leq \downarrow$$

$$K - P -$$

$$\times \times$$

ide losowy

$$\{\omega_1, \omega_2\}$$

$$K+$$

$$K-$$

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2 : \omega_1, \omega_2 \in \{1, 2, \dots, 300\}, \omega_1 \neq \omega_2 \}$$

$$A \neq B$$

$$A \neq B$$

$$1 \neq 2 \neq 1+1$$

$$x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$$

$$x_i \neq x_j$$

$$i \neq j$$

$$i, j \in \{indeksy\}$$

$$\times$$

$$\{1, \dots, 300\} = 2$$

$$\binom{300}{2}$$

$$\Omega - \text{opis}$$

$$\bar{\Omega} \in \mathcal{N}_+$$

$$Z = \{10, \dots, 99\}$$

$$\bar{Z} = 90$$

$$\Omega = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{299, 300\}\}$$

$$\bar{\Omega} = \binom{300}{2}$$

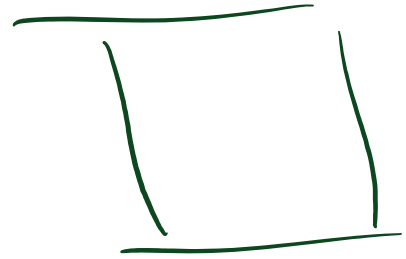
$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\bar{\Omega}}$$

~~$$\Omega = \{1, \dots, 50\}$$

$$\bar{\Omega} = 50$$~~

Ω - jedyn 250

~~$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$~~



$$\Omega_A = \{1, \dots, 21\}$$

$$\bar{A}_A$$

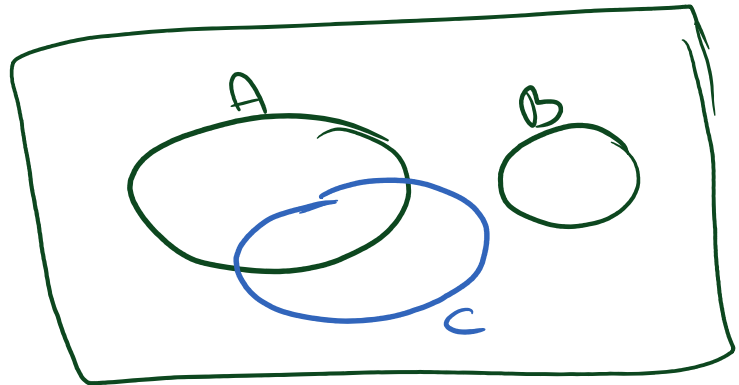
$$P(A) = \frac{15}{21}$$

Ω p.u. 50

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A) \geq 0$$

$$P(A) \leq 1 \quad \underline{< 0, 1>}$$



$$A \cap B = \emptyset$$

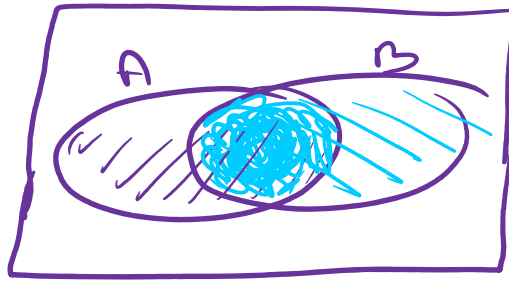
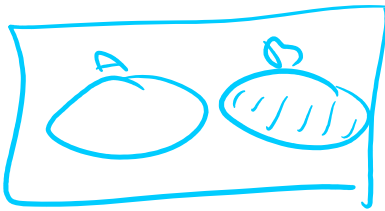
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$



$$\frac{P(A') = 1 - P(A)}{P(\Omega)}$$

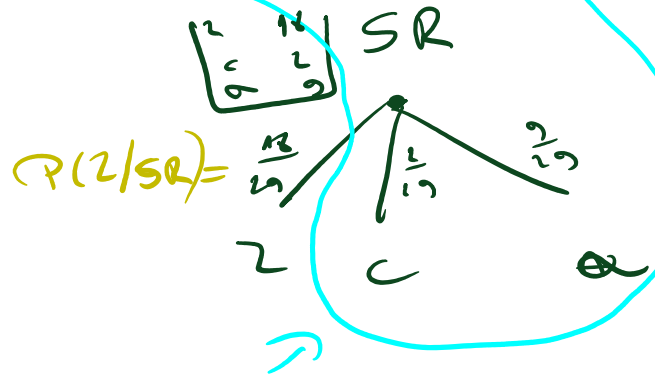
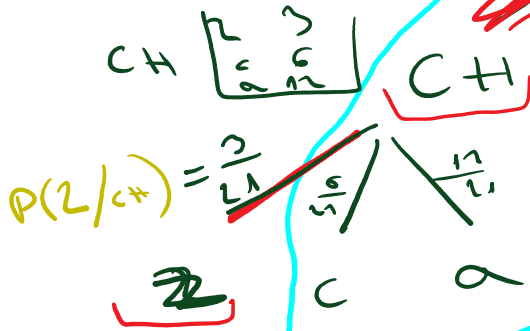
$$\underline{P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)}$$



$$P(A) = \frac{\bar{A}}{\pi}$$

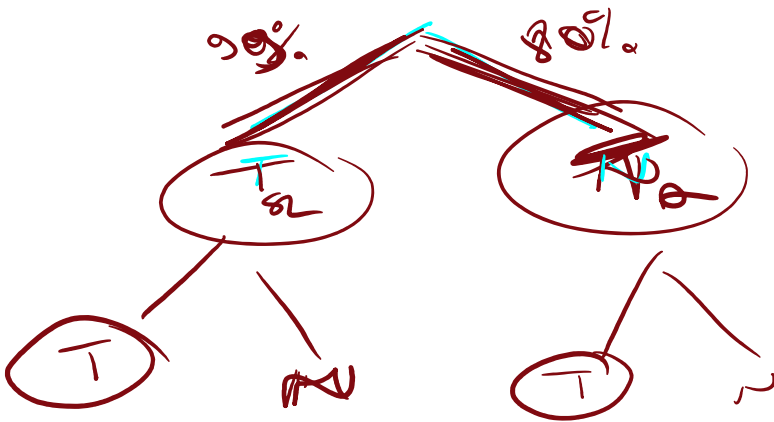
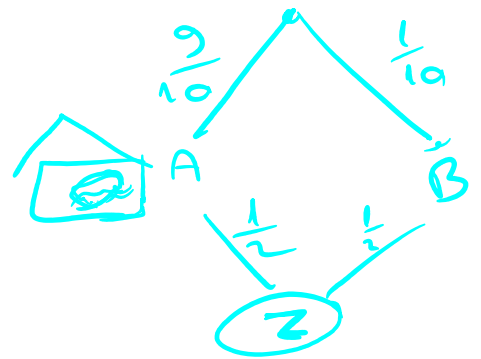
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

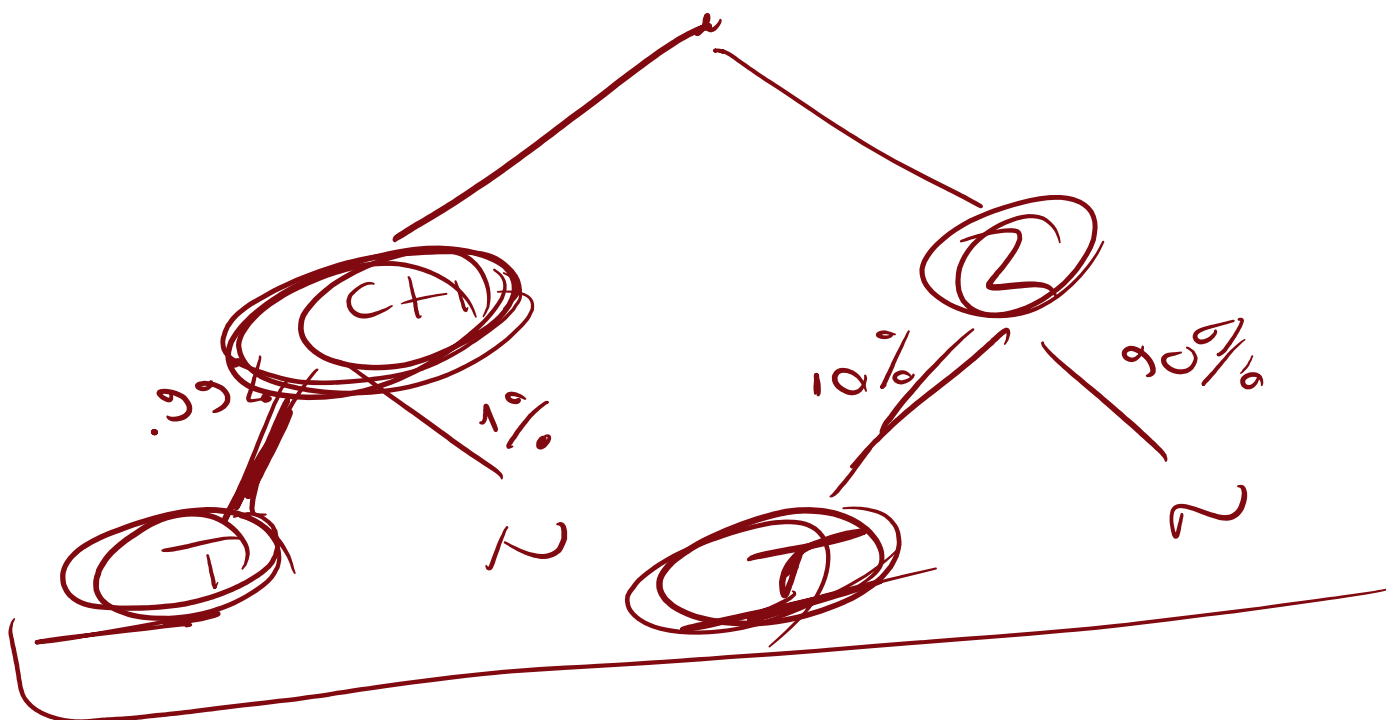
$P(CH) = \frac{21}{50}$ CH 21
SR 19 $\frac{29}{50} = P(SR)$



$$P(Z \cap CH) = P(Z/CH) \cdot P(CH)$$

$$P(Z/CH) = \frac{P(Z \cap CH)}{P(CH)}$$







$$P(2 \times S) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

$$P(I / 2 \times S) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}$$

$$\frac{\frac{1}{9} \cdot 18}{\frac{1}{6} \cdot 18} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{5}{6} \times = \frac{5}{9} \cdot 18$$

rentle - 11ch - 21ch

double
 3^{10}

3

3^{10}

2

2

2

2

2

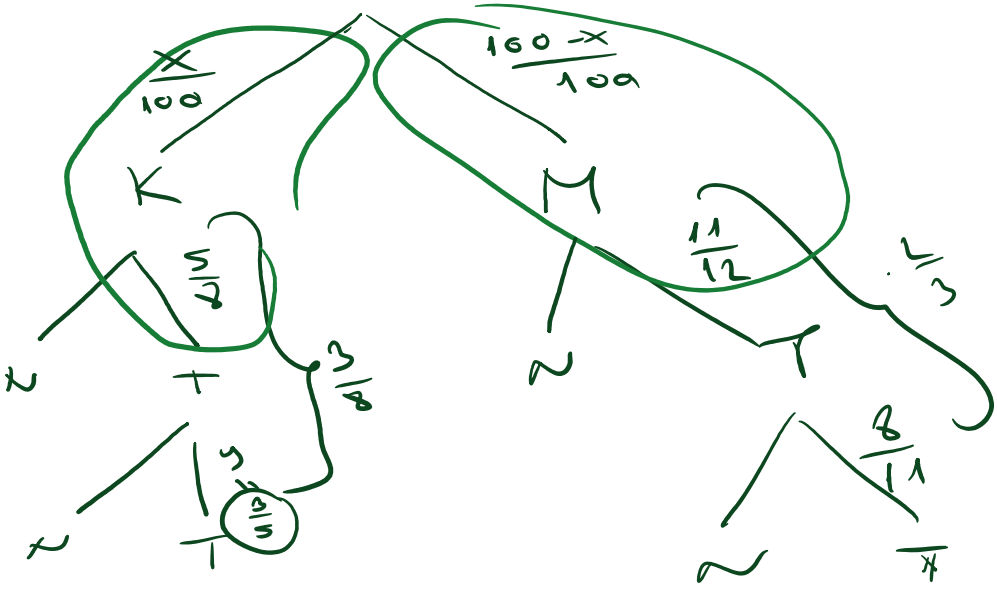
2

2

150
 150

$$\binom{3}{2}(2^{10} - 2)$$

$$3^{10} - 3 - \binom{3}{2}(2^{10} - 2)$$



$$\frac{11}{12} \cdot b = \frac{2}{3}$$
$$b = \frac{24}{33} = \frac{8}{11}$$

$$\frac{5}{8} \cdot 5 = \frac{3}{8}$$

$$P(T) =$$

$$A(3,0)$$

$$(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$S(1,0)$$

$$r = 1$$

$$y = a(x-3)$$

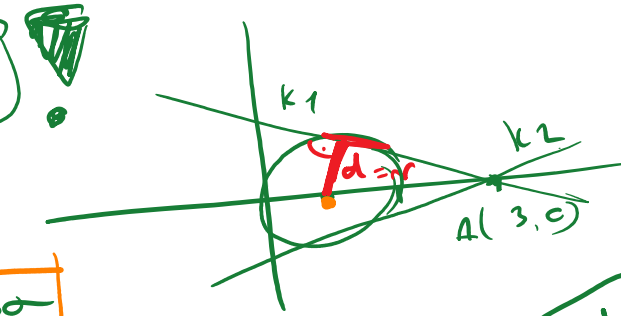
$$ax -$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$k: ax - y - 3a = 0$$

$$A = a \quad B = -1 \quad C = -3a$$

$$x_s = 1 \quad y_s = 0 \quad d = r = 1$$



$$d = r$$

$$d = \frac{|Ax_s + By_s + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$d = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$$

$$|a - 3a|$$

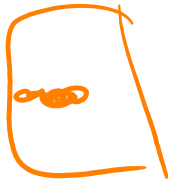


$$r^2 = a^2 + 1$$

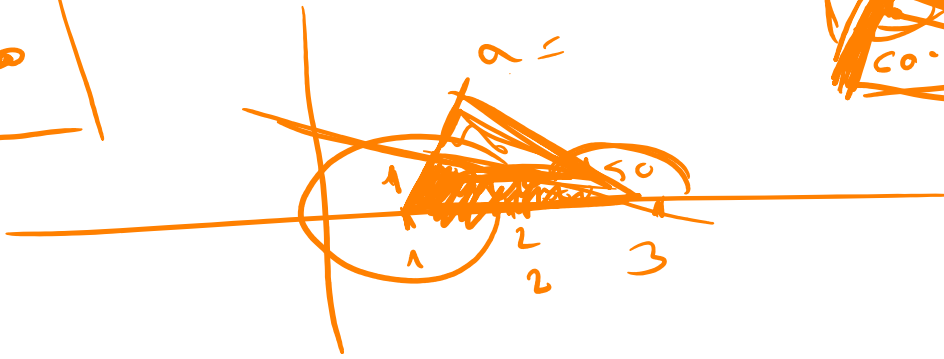
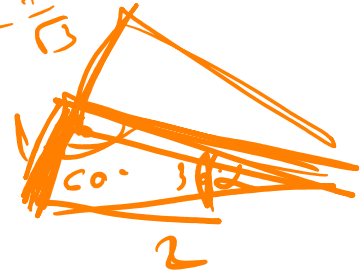
$$a^2 = \frac{1}{3}$$

$$y = a(x-3)$$

$$ax - y - 3a = 0$$



$$a = \tan \alpha = \tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$D = \frac{1}{2} | \dots |$$