

4.17. Suma stu kolejnych liczb naturalnych, które w wyniku podzielenia przez 4 dają resztę 1, jest równa 29500. Wyznacz największą z tych liczb.

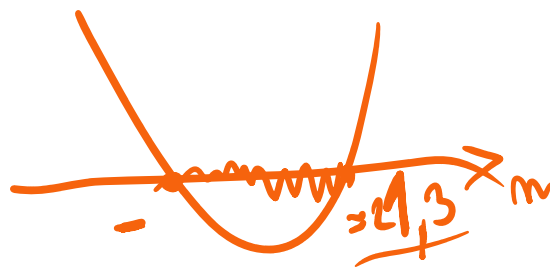
4.18. Ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = 2n - 3$, gdzie $n \in N_+$, ma sto wyrazów. Jeżeli od kwadratu wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od końca, odejmiemy kwadrat wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od początku, to otrzymamy różnicę 29400. Oblicz wartość wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od końca.

4.19. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{1+3+5+7+9+\dots+(2n+3)}{4n-7}$, gdzie $n \in N_+$. Które wyrazy tego ciągu są równe 4?

11.12.2021

$$\underbrace{a, b, c - \text{c. aryt.}}_{\neg} \Leftrightarrow \underbrace{b = \frac{a+c}{2}}$$

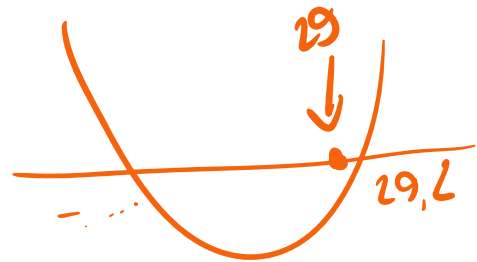
$$\frac{a_1 + a_3}{2} = a_2 \Rightarrow \text{c. aryt.}$$



$$k, l \in \mathbb{N}$$

$$n \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 21\}$$

$$\Delta = 15 \sqrt{\dots}$$



$$\begin{cases} S = \frac{a_1}{1-q} \\ |q| < 1 \end{cases}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1(1-q^{\infty})}{1-q} > 0$$

Zad.1 (2 pkt.)

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie 22 wynosi 12. Wyznacz iloraz tego ciągu.

Zad.2 (3 pkt.)

W ciągu geometrycznym (a_n) zachodzi $a_2 = 4$ oraz $\frac{a_6 + a_9}{a_6} = \frac{7}{8}$. Znajdź pierwszy wyraz tego ciągu.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

$$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}$$

$$a_n = a_k + (n-k) \cdot r$$

$$stL = 3 \neq stM = 2$$

Zad.3 (5 pkt.)

Oblicz: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n^2-10)(n-2)}{(3+2n)(4-3n)}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2-6n}{-2+1+4+7+\dots+(3n-5)}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{n^2+1} - \frac{5n}{3+2n} \right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20-2n}{3n^2+4} \right)^3$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{9^n + 11^n})$

Zad.4 (3 pkt.)

Rozwiąż $x + \frac{x}{x+2} + \frac{x}{(x+2)^2} + \dots = \frac{3}{2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(4 - \frac{10}{n^3} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right)}{n^2 \left(\frac{3}{n} + 2 \right) \left(\frac{4}{n} - 3 \right)} = -\frac{2}{3}n = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{n^2+1} - \frac{5n}{3+2n} \right) =$$

4.17. Suma stu kolejnych liczb naturalnych, które w wyniku podzielenia przez 4 dają resztę 1, jest równa 29500. Wyznacz największą z tych liczb.

4.18. Ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = 2n - 3$, gdzie $n \in N_+$, ma sto wyrazów. Jeżeli od kwadratu wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od końca, odejmiemy kwadrat wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od początku, to otrzymamy różnicę 29400. Oblicz wartość wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od końca.

4.19. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{1+3+5+7+9+\dots+(2n+3)}{4n-7}$, gdzie $n \in N_+$. Które wyrazy tego ciągu są równe 4?

$$n = 100 \quad S_{100} = 29500 =$$

?

97

493

$$a_1 = 4x + 1$$

$$5, 9, 13, 17, \dots, 401$$

$$a_2 = 4x + 5 = 4(x+1) + 1$$

$$a_3 = 4x + 9 = 4(x+2) + 1$$

$$a_{10} = 4x + \dots = 4(x+9) + 1$$

$$\underline{a_{100} = 4(x+99) + 1}$$

$$k \in \mathbb{N}_+, k \leq 100$$

$$a_{97}$$

4.18. Ciąg arytmetyczny o wyrazie ogólnym $a_n = 2n - 3$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$, ma sto wyrazów. Jeżeli od kwadratu wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od końca, odejmiemy kwadrat wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od początku, to otrzymamy różnicę 29400. Oblicz wartość wyrazu stojącego na miejscu k , licząc od końca.

$$-1, 1, 3, 5, \dots$$

$$191, 193, 195, 197$$

$$a_{98}^2 - a_3^2 = 29400$$

$$a_{101-k}^2 - a_k^2 = 29400$$

$$a_{100}^2 - a_1^2$$

$$a_{99}^2 - a_2^2$$

$$k=3$$

$$(a_{101-k})^2 - a_k^2 = 29400$$

$$a_n = 2n - 3$$

$$202 - 2k - 3 \left(199 - 2k \right)^2 - (2k - 3)^2 = 29400$$

$$(199 - 2k - 2k + 3)(199 - 2k + 2k - 3) = 29400$$

1. Dany jest ciąg (a_n) zdefiniowany rekurencyjnie $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3n \end{cases}$. Wykaż, że ciąg $(a_3, a_4, a_5 - 52)$ jest ciągiem arytmetycznym.

2021-12-15

poniedziałek, 13 grudnia 2021

16:26

2 Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = n^3 - 4n^2 + 5$.

a) Wykaż, że wszystkie wyrazy tego ciągu z wyjątkiem jednego są większe lub równe od (-3) .

b) Wyznacz ten wyraz, który jest mniejszy od (-3) .

$$\left((\quad) \right) \cap \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 4, 5, 6, \dots\}$$

$a_3 < -3$

$$a_n = (n-2)(n^2 - 2n - 4)$$

$a_3 =$

3. Dla jakich wartości $x \in \mathbb{R}$ ciąg $(x-2, 5x+10, x-50)$ jest
(3p) geometryczny?

4. Suma trzech pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 6. Różnica wyrazów trzeciego i drugiego jest 5 razy większa od różnicy wyrazów drugiego i pierwszego. Wyznaczyć ten ciąg.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{62}{3} \\ q = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 5 \end{cases} \quad (2, 10, 50) \vee \left(\frac{62}{3}, \frac{62}{3}, \frac{62}{3} \right)$$

5. Narysuj wykres funkcji, podaj Zwf.
 (5p) $f(x) = \frac{2}{x-1} + \left(\frac{2}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{2}{x-1}\right)^3 + \dots$



$$f(x) = \begin{cases} 5 \\ |x| < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{x-3} \\ x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \end{cases}$$

$$b^2 = -6b^2 + 180b + 105b - 4900$$

$$7b^2 - 385b + 4900 = 0$$

Zadanie 8.14. [matura, czerwiec 2015, zad. 7 swe. (6 pkt)]

Trzy liczby, których suma jest równa 105, są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Pierwsza z tych liczb jest jednocześnie pierwszym, druga szóstym, a trzecia dwudziestym szóstym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz te liczby.

$$a = 2b - 35$$

$$b^2 = (2b - 35)(-3b + 140)$$

$$c = 5b - 4(2b - 35) = -3b + 140$$

$$b^2 - 55b + 700 = 0$$

$$(b - 35)(b - 20) = 0$$

$$b = 35$$

$$b = 20$$

$$a = 35$$

$$a = 5$$

$$70 \cdot 10$$

$$\underline{35} \cdot \underline{20}$$

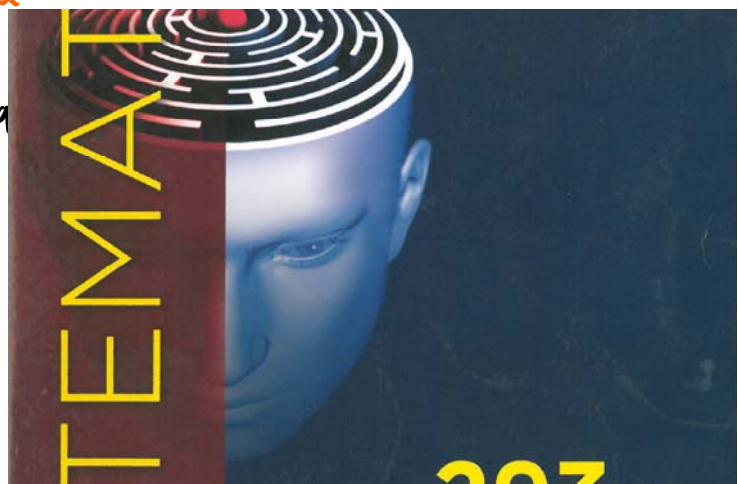
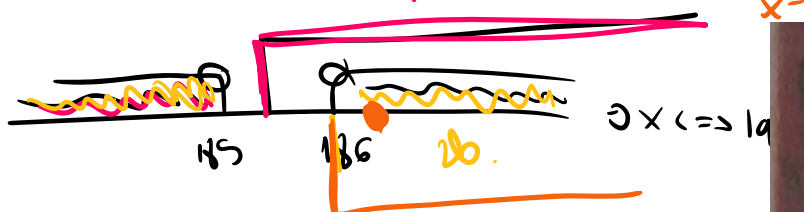
$$a = 2b - 35$$

Zadanie 8.16. [matura, maj 2016, zad. 8. (2 pkt)]

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$ dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x , dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jest zbieżny.

$$\left|\frac{a}{b}\right| < 1 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{|a|}{|b|}}_{>0} < 1 \quad |a| < |b|$$

$$a_n > 0$$



$$|9| > \alpha \Rightarrow$$

$$\underline{2x - 365 > 1} \quad \vee \quad \underline{2x - 365 \leq -1}$$

$$\underbrace{x < 185} \quad \cup \quad \underbrace{x > 186}$$

$$\underbrace{\underbrace{x < 185}}_{\text{---}} \quad \cup \quad \underbrace{\underbrace{x > 186}}_{\text{---}}$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{x < 185}}_{\text{---}}}_{\text{---}}$$

$$\frac{5}{0^-} \approx \frac{5}{-\frac{1}{1000000}} = 5 \cdot \frac{-1000000}{1} = -5000000 = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5n}{-n^2 + 3n + 1}$$

$$\text{st} L = 3 \quad \text{st} M = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(1 - \frac{5}{n^2})}{n^2(-1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2})} = \left[\frac{\infty}{-1} \right] = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(1 - \frac{5}{n^2})}{n^2(-\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3})} = \left[\frac{+1}{0^-} \right] = -\infty$$

$0^- < 0 \quad 0 \quad 0^+ > 0$

2021-12-20

środa, 15 grudnia 2021 18:11

827. Wykaż, że jeśli równanie $x^4 + px^2 + q = 0$ ma cztery różne rozwiązania rzeczywiste tworzące ciąg arytmetyczny, to $9p^2 = 100q$.

8

8

$$\underline{a, aq, aq^2}$$

$$b^2 = a \cdot c$$

$$a, aq \in \mathbb{Z}$$

niepłe

Zadanie 8.27. [matura, czerwiec 2018, zad. 10. (4 pkt)]

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2) , którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz aq tego ciągu.

$$a, aq, aq^2 - 4 - \text{c. aryt.}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ 2aq = a + aq^2 - 4 \end{array}$$

$$aq = ?$$

$$\underline{aq^2 = a \cdot q^2}$$

$$\underline{aq^2 - 2aq + a = 4}$$

$$a(q^2 - 2q + 1) = 4$$

$$a, q \in \mathbb{C} \text{ niepł, } h$$

$$\underline{a(q-1)^2 = 4}$$

$$\text{I } a=1 \quad (q-1)^2 = 4 \quad \text{jedyna możliwa}$$

$$\text{II } a \neq 1$$

$$\text{III } a = -1 \Rightarrow (q-1)^2 = -4$$

$$a=1$$

$$(q-1)^2 = 4$$

$$q-1=2 \vee q-1=-2$$

$$\underline{q=3} \vee \underline{q=-1}$$

$$\underline{aq=3} \vee \underline{aq=-1}$$

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \vee b = 0$$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} a \cdot b = 8 \\ a, b \in \mathbb{C}_* \end{array} \right\}}_{\text{link}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ b=8 \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} a=2 \\ b=4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a=4 \\ b=2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a=8 \\ b=1 \end{array} \right\}$$

link

Zadanie 8.24. [matura, czerwiec 2017, zad. 10. (5 pkt)]

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) jest geometryczny. Pierwszy wyraz a_1 ciągu arytmetycznego jest ilorazem ciągu geometrycznego (b_n) . Wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, a suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 124. Natomiast pierwszy wyraz b_1 ciągu geometrycznego jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n) . Suma dwóch pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) jest równa 18. Wyznacz te ciągi.

a_n - ant
 b_n - gert

✓ $a_1 = q/k_n$ $a_n \in \mathbb{C}$

✓ $S_8 = 124 = a_1 + a_2 + \dots + a_8$

✓ $b_1 = r_{am}$

✓ $b_1 + b_2 = 18$

$b_1 + b_1 q = 18$

$b_1 + a_1 b_1 = 18$

$a_1 = q$

$b_1 = r$

$b_1 + a_1 b_1 = 18$

$2a_1 + 7b_1 = 31$

$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = (a_1 + a_1 + 7r) \cdot 4 = (2a_1 + 7b_1) \cdot 4 = 124 / :4$

$2a_1 + 7b_1 = 31$

~~BAZAA~~

$\begin{cases} b_1 + a_1 b_1 = 18 \quad | \cdot 2 \\ 2a_1 + 7b_1 = 31 \end{cases}$ r. kw z do m
 r. lin z do m

$2a_1 = 31 - 7b_1$

$2b_1 + (2a_1)b_1 = 36$

$$2b_1 + \overbrace{(2a_1)} b_1 = 36$$

$$2b_1 + b_1(31 - 7b_1) - 36 = 2b_1 - 7b_1^2 + 31b_1 - 36 =$$

$$\begin{cases} -7b_1^2 + 33b_1 - 36 = 0 \\ 7b_1^2 - 33b_1 + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 33^2 - 4 \cdot 7 \cdot 36 = 1089 - 1008 = 81 = 9^2$$

$$a_1 = \frac{31 - 7b_1}{2} \quad \begin{cases} b_{11} = \frac{33 - 9}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \\ b_{12} = \frac{33 + 9}{14} = \frac{42}{14} = \underline{3} \end{cases}$$

$$a_{11} = \frac{31 - 12}{2} = \frac{19}{2} \notin \mathbb{C}$$

$$a_{12} = \frac{31 - 21}{2} = 5 \in \mathbb{C}$$

$$\begin{matrix} b_1 = 3 & q = 5 \\ a_1 = 5 & r = 3 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 5 + (n-1) \cdot 3 \\ b_n &= b_1 \cdot 5^{n-1} = \underline{3 \cdot 5^{n-1}} \end{aligned}$$

↓ 18 min

Zadanie 8.14. [matura, czerwiec 2015, zad. 7 swe. (6 pkt)]

Trzy liczby, których suma jest równa 105, są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Pierwsza z tych liczb jest jednocześnie pierwszym, druga szóstym, a trzecia dwudziestym szóstym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz te liczby.

$$a + b + c = 105$$

$$a < b < c$$

a, b, c - c. geom $\Leftrightarrow$

$$b^2 = a \cdot c$$

$$a = a_1 \rightarrow$$

$$b = a_6 = a_1 + 5r$$

$$c = a_{16} = a_1 + 15r$$

$$\left. \begin{array}{l} b = a + 5r \\ c = a + 15r \end{array} \right\}$$

$$5r = b - a$$

R. l.

R. l

R. kw

$$\left\{ \begin{array}{l} c - a = 5b - 5a \\ a + b + c = 105 \\ b^2 = a \cdot c \end{array} \right.$$

$$c = 5b - 4a$$

$$a + b + 5b - 4a = 105$$

$$6b - 3a = 105 \quad | :3$$

$$2b - a = 35$$

$$a = 2b - 35$$

$$\begin{aligned} c &= 5b - 4a \\ c &= -3b + 140 \end{aligned}$$

$$b^2 = (2b - 35)(-3b + 140)$$

$$b^2 = -6b^2 + 385b - 35 \cdot 140$$

$$7b^2 - 385b + 35 \cdot 140 = 0$$

$$b^2 - 55b + 700 = 0$$

$$35 \cdot 20$$

$$(b - 35)(b - 20) = 0$$

$$\underbrace{b = 35} \quad \underbrace{b = 20}$$

Zadanie 8.23. [matura, czerwiec 2017, zad. 5. (1 pkt)]

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, w którym iloraz jest trzy razy większy od pierwszego wyrazu, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{4}$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{3}{7}$

B. $\frac{1}{7}$

C. $\frac{7}{3}$

D. 7

$$q = 3a_1$$

$$a_1 = \frac{1}{7}$$

$$S_n = \frac{1}{4} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad n \rightarrow \infty \quad S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{a_1}{1-3a_1}$$

$$4a_1 = 1 - 3a_1$$

$$a_1 = \frac{1}{7}$$

Zadanie 8.16. [matura, maj 2016, zad. 8. (2 pkt)]

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$ dla $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x , dla której nieskończony szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jest zbieżny.

$$\Rightarrow |q| < 1$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q / : a_n$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_1 = \frac{1}{2x-371}$$

$$a_2 = \frac{1}{(2x-371)^2}$$

$$|q| = \frac{1}{|2x-371|} < 1 \quad |2x-371| > 0$$

$$2x-371 > 1 \vee 2x-371 < -1$$

$$x > 186 \vee x < 185$$

$$S(a,b) \\ r > a$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \text{f(0,0)}$$

Zadanie 8.28. [matura, czerwiec 2018, zad. 11. (4 pkt)]

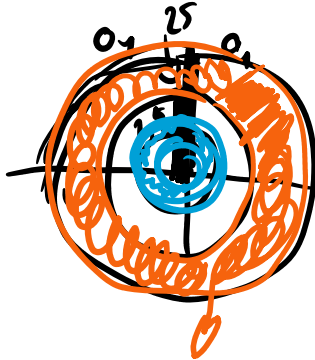
Dany jest nieskończony ciąg okręgów (o_n) o równaniach $x^2 + y^2 = 2^{11-n}$, $n \geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} wewnętrznym okręgiem o_{2k} .

Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k , gdzie $k \geq 1$.

$$O_n: x^2 + y^2 = 2^{11-n}$$

$$O_1: x^2 + y^2 = 2^{10} \\ S(0,0) \quad r = \sqrt{2^{10}} = 2^5$$

$$\boxed{P_1 = O_1} \quad P_2 = O_3 \\ P_1 = O_2 \quad P_2 = O_4$$



$$O_2: x^2 + y^2 = 2^9$$

$$S(0,0) \quad r = \sqrt{2^9} = (2^9)^{\frac{1}{2}} = 2^{4,5}$$

$$x^2 + y^2 = 2^8$$

$$S(0,0) \quad r = 2^4$$

$$P_1 = P_{O_1} - P_{O_2} = \pi \cdot 2^{10} - \pi \cdot 2^9 = \\ \pi \cdot 2^9 (2 - 1) = \pi \cdot 2^9$$



$$P_2 = P_{O_3} - P_{O_4} = \pi \cdot r_3^2 - \pi r_4^2 = \pi \cdot 2^8 - \pi \cdot 2^7 = \pi \cdot 2^7$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots = \pi \cdot 2^9 + \pi \cdot 2^7 + \pi \cdot 2^5 + \dots$$

$$q = 2^{-2} \quad a_1 = \pi \cdot 2^9$$

$$S = \frac{\pi \cdot 2^9}{1 - 2^{-2}} = \pi \cdot 2^9 \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \pi \cdot 2^9$$

$$S = \frac{\pi \cdot 2^9}{1 - 2^{-2}} = \frac{\pi \cdot 2^9}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^9 = \underline{\underline{\frac{1}{3} \pi \cdot 2^{11}}}$$

2021-12-20

środa, 15 grudnia 2021 18:12

1. → 3 2. → 4 ^{m = 100}

4.19. Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \frac{1+3+5+7+9+\dots+(2n+3)}{4n-7}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$. Które wyrazy tego ciągu są równe 4?

$$a_n = 4$$

$$a_1 = \frac{1+3+5}{-3} = -3$$

$2n+3$
 $\uparrow$
 $n=1$
 5

$$a_2 = \frac{16}{8-7} = \frac{16}{1} = 16$$

$$\frac{1+2n+3}{2} (n+2)$$

$$a_n = \frac{(n+2)^2}{4n-7} = 4$$

$$a_4 = 4 \vee a_8 = 4$$

$$n^2 + 4n + 4 = 16n - 28$$

$$n^2 - 12n + 32 = 0$$

$$(n-8)(n-4) = 0$$

$$n=8 \vee n=4$$

100 $2 \times 1 \rightarrow 100n$ $P+$ part sq $2 \times 100n$
 $1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 100n \leftarrow 2k$

$(1,2) \vee (2,1)$
 $\uparrow$

1k

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	4	5	6
3						
4						
5						
6						

$(3,3)$ $(K-) \{1,2\} = \{2,1\}$
 $(K+) (1,2) = (2,1)$

$36000 \leftarrow 1000 \cdot 100$
 $\rightarrow 2 \times 100 \times 100$

$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6}$
 6^4 $4 \times 100n$

losujemy k z m elementów

losujemy 4 z 6

$P+$

$K+$

WARIACJA

z powtórzeniami

$W_m^k = m^k$
 $\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot m}_k$

4 x MONETA

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$W_2^4 = 2^4$

$\wedge$ Am

328

$(P-)$

$\{1,2\} = \{1,1\}$

$(K-)$

k z m

$C_m^k = \binom{m}{k}$

n pok // dft

$\frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$

$\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6}$

$(K+)$

328

WARIACJA bez powt.
k z m

$V_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}$

10 ksynek
ma 10 miejsc
 $10! \cdot (P+)$
 $P_{10} = 10!$
m z m elementów
 $P_m = m!$

$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!}$

j.v. hln parte. 0

$$\begin{array}{l}
 \text{p. } \frac{5}{\text{de}} \text{ } \frac{5}{\text{v}} \text{ } \frac{6}{\text{p}} \\
 \text{v} \text{ } \frac{5}{\text{p}} \text{ } + \text{ } \frac{6}{\text{p}} \text{ } \frac{0}{\text{v}} \\
 \text{v} \text{ } \frac{5}{\text{p}} \text{ } \frac{8!}{\text{v}} \text{ } \frac{4}{\text{p}} \text{ } \frac{8!}{\text{v}} \text{ } \frac{4}{\text{p}} \text{ } \frac{0}{\text{v}}
 \end{array}$$

$$\bar{A} = 5^2 \cdot 8! + 4^2 \cdot 8! = \underline{(5^2 + 4^2) \cdot 8!}$$

1 + 6 miejsc

$$\begin{array}{c} \overline{0} \\ \hline 2 \quad 7 \quad 1 \quad 7 \quad \dots \quad 7 \end{array} = 2 \cdot 1 \cdot 7^7 = \boxed{2 \cdot 7^7 = \bar{A}}$$

$\{5,6\}$

$W_7^7 = 7^7$

(B)

8

$$\overline{9} \cdot \overline{9} \cdot \overline{8} \cdot \overline{7} \cdot \overline{6} \cdot \overline{5} \cdot \overline{4} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} = 9 \cdot 9! = 9 \cdot \frac{9!}{(9-8)!} = 9 \cdot 9! = \bar{B}$$

(C)

$$\begin{array}{c} 9 \quad 8 \quad 7 \\ \hline 2 \cdot 1 = \bar{C} \end{array}$$

(D)

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ 5 \quad 5 \quad 4 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} = \underline{5 \cdot 5!}$$

(3.70)

A, B, 1, 2, 3

$\overline{AB \times 2}$
 $\overline{BA}$

$\overline{A}$

$\left. \begin{array}{l} A _ _ B _ \times 3 \\ \vee _ A _ B _ \times 2 \\ \vee _ _ A _ B \times 1 \end{array} \right\}$

$3!$
 $\downarrow \downarrow \downarrow$
 $2 \times \left(\begin{array}{l} \textcircled{A} \textcircled{B} _ _ \times 3 \\ + _ A _ B _ \times 2 \\ + _ _ A _ B \times 1 \end{array} \right) \cdot 3!$
 ~~$\textcircled{B} \textcircled{A}$~~

$$A = 2 \cdot (3 + 2 + 1) \cdot 3! = 12 \cdot 6 = 72$$

$$\overline{\overline{S}} = 5!$$

$\overline{A \ B}$
 $5!$
NIE SPŁYWA

$2 \begin{array}{l} AB \\ BA \end{array}$
 $\downarrow$
 $\boxed{AB} \boxed{123}$
 $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$
 $\textcircled{4!}$

$A' - A_i$ spłwa woli.

$$\overline{A'} = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$$

UŚCIŚKIE $\leftarrow$ FUS

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{S}} - \overline{A'} = 120 - 48 = 72$$

B - parę A: B stę 2 in knd

$\left. \begin{array}{l} A _ _ B _ \\ _ A _ _ B \end{array} \right\} \times 2 \times 3$

$$\overline{B} = 2 \cdot 2 \cdot 3! = 24$$

3.93

20 osób

12 K | 8 M

wybierz 5 osób

K - P -

$$A = (2K \wedge 3M) \vee (1K \wedge 4M) \vee (0K \wedge 5M) \quad \binom{n}{k}$$

$$\bar{A} = \binom{12}{2} \cdot \binom{8}{3} + \binom{12}{1} \cdot \binom{8}{4} + \binom{8}{5}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

2022-01-10

poniedziałek, 10 stycznia 2022 16:29

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

$$\underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{3} \quad \underline{2} \quad \underline{2} \quad \boxed{7}$$

$$\{1, 2, \dots, 9\}$$

$$\underline{3 \times "2"} \wedge \underline{2 \times "5"} \wedge \underline{\text{min}}$$

$$3 \text{ min} = 26$$

dl ②

$$\binom{6}{3} \binom{3}{2} \cdot 7 = \frac{6!}{3! \cdot 2!} \cdot 7$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad k-p-326 &\Rightarrow \binom{6}{3} \\ k-p-223 &\Rightarrow \binom{3}{2} \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{6!}{3! \cdot 2!}}$$

$$\overbrace{\underline{2_1} \underline{2_2} \underline{2_3}}^{3!} \overbrace{\underline{5_1} \underline{5_2}}^{2!} \boxed{L} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 2!} \cdot 7$$

$$3.58 \quad a) \quad 25 | x$$

$$\begin{array}{r} x - \overline{\overline{00}} \\ \underline{25} \\ 50 \\ \underline{75} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{1} + \frac{5}{8} \cdot \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{1} + \dots \\ & \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{10}{7} \\ & 14 + 8 = \boxed{22} \end{aligned}$$

$$b) \quad 4 | k$$

$$\overline{P} \quad \overline{2} \quad \overline{4} \quad \overline{8} \quad \overline{0}$$

$$\begin{array}{c} \overline{1, 3, 5, 7, 9} \\ \overline{2} \\ \overline{4} \\ \overline{6} \\ \overline{8} \\ \overline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \overline{N} \quad \overline{2} \quad \overline{6} \\ \overline{7} \quad \overline{0} \quad \overline{4} \\ \overline{8} \quad \overline{0} \quad \overline{4} \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{7} \cdot \frac{N}{5} \cdot \frac{2}{2.6} \right) \vee \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} \right) \vee \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{1} \right)$$

$$\left(\frac{1}{7}, \frac{12}{5}, \frac{2}{2,6} \right) \vee \left(\overline{7}, \overline{3}, \overline{2} \right) \vee \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{9}{1} \right)$$

Handwritten mathematical work showing calculations and a diagram.

Top Left:

$$\begin{array}{r} \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ 2 \quad 5 \\ 5 \quad 0 \\ 7 \quad 5 \end{array}$$

Top Right:

$$\begin{array}{r} \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ 1 \quad 1 \\ 6 \cdot 7 = 42 \\ 7 \cdot 8 \cdot 7 = 392 \\ 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 43 + 392 = 435 \end{array}$$

Center:

$$\begin{array}{r} 2451 \\ 56 \cdot \\ \hline 336 \end{array}$$

Left Side:

Diagram showing a vertical stack of numbers 5, 7, 8, 9 in a circle, with an arrow pointing to the calculation:

$$4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

Bottom Left:

$$\begin{array}{r} 5 \text{ ---} \\ 3, 4, 6, 7, 8, 9 \\ 1 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7 + \end{array}$$

Bottom Center:

$$5 \cdot 7 = 46, 7, 8, 9$$

Right Side:

$$\begin{array}{r} 72 \cdot 18 \\ 2016 \\ 336 \\ 2352 \\ 35 \\ 2387 \\ 2388 \end{array}$$

10.9.8.7

9.9.8.7

1, 2, 3, 4, 5

8 p. 5x osob

wyng 1 na VII

D' - ~ D - 10 osob na VII

7 piktur



pikture przypisy osoby

= - - - - - osobie przypisy pikture.

8^5

USZYSTKO

-

7^5

FUJ

=

$8^5 - 7^5$

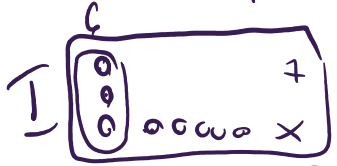
SUPER

3.4.6

7.0

8 os.

1 wypr. pusty.

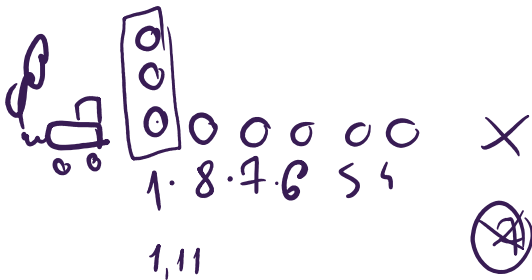
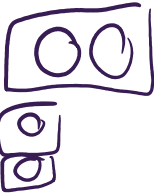
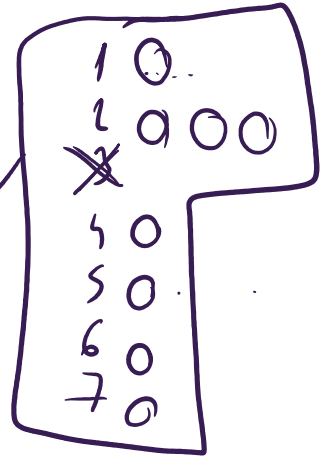


7. 6.



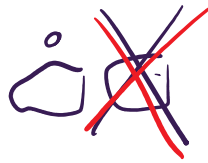
odczyt wypr.

000



6 3 2 1 4 5 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & P- \\ & & & K- \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$



skieruj 1 wypr.

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 8 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 2$$

$$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2} = 15$$

1,2,3,4,5,6,7,8

Diagram illustrating a sequence of shapes and arrows, likely representing a combinatorial process. The shapes are: a triangle with a red α , a circle with a red 0 , a rectangle with a green border containing a red 0 and a red 0 , a rectangle with a green border containing a red 0 and a red 0 , a circle with a red 0 , a circle with a red 0 and a red 0 , and a rectangle with a red 0 and a red 0 . Arrows point from the green-bordered rectangles to the circles. A red 'X' is drawn over the last shape.

$$\bar{7} \cdot \bar{6} \cdot \binom{8}{3} \cdot 5! + 7 \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot 4!$$