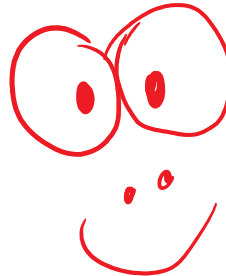
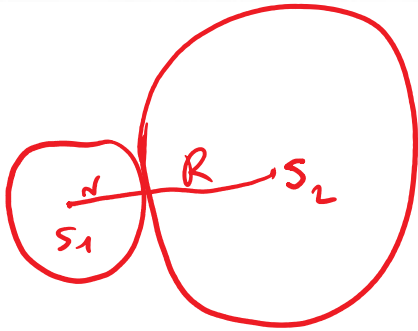


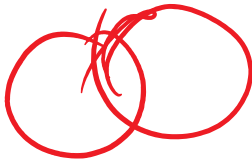
Zadanie 7.23. [matura, czerwiec 2018, zad. 2. (1 pkt)]

Okrąg o równaniu $(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 625$ jest styczny do okręgu o środku $S = (12, 5)$ i promieniu r . Wynika stąd, że

A. $r = 5$ B. $r = 15$ C. $r = 10$ D. $r = 20$ 

$$R + r = |S_1 S_2|$$

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 5 = 15 \\ 12 \\ 3 \cdot 4 \\ 9 = 3 \cdot 3 \end{array}$$



$$|R - r| = |S_1 S_2|$$

Zadanie 7.19. [matura, maj 2017, zad. 3. (5 pkt)]

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-5, 3)$ i $B = (0, 6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad a, b, r$$

$$A \overset{x, y}{(-5, 3)} :$$

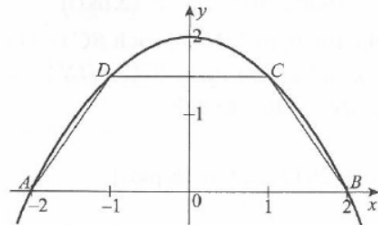
$$S \overset{x, y}{(a, b)} \in x - 3y + 1 = 0$$

$$a - 3b + 1 = 0$$

$$a = 3b - 1$$

Zadanie 14.11. [matura, maj 2016, zad. 16. (7 pkt)]

Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A = (-2, 0)$ i $B = (2, 0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, których dłuższą podstawą jest odcinek AB , a końce C i D krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek).



Wyznacz pole trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka C . Oblicz współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

$$P(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 2x + 4$$

$$P'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2$$

$$P'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 - 2x + 2 > 0$$

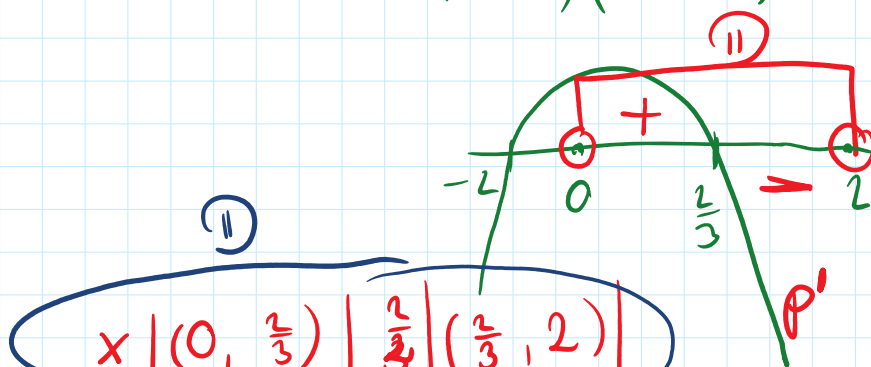
$$(x+2)\left(-\frac{3}{2}x+1\right) > 0$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f \nearrow \Rightarrow f' > 0$$

$$f \searrow \Rightarrow f' < 0$$

$$f \rightarrow \Rightarrow f' = 0$$

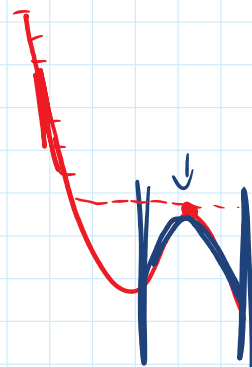


x	$(0, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, 2)$
P'	+	0	-
P	↗	↘	↘

ZNAM POCHODNEJ

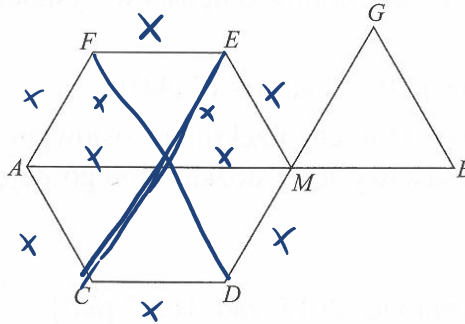
MONOT FUNKCJI

dlu $x = \frac{2}{3}$ $P(x) = y_{\max}$ - przy - albo
WARTOŚĆ WZAJUS KOLA



Zadanie 14.13. [matura, czerwiec 2016, zad. 8 swe. (5 pkt)]

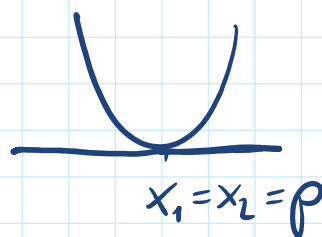
Dany jest odcinek AB o długości 10. Rozpatrujemy wszystkie sześciokąty foremne $ACDMEF$ i trójkąty równoboczne MBG , których wspólny wierzchołek M leży na odcinku AB (zobacz rysunek).



Oblicz stosunek obwodu sześciokąta $ACDMEF$ do obwodu trójkąta MBG w przypadku, gdy suma pól tych dwóch wielokątów jest najmniejsza.

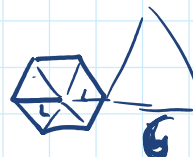
$$f(x) = \frac{3}{2}x^2\sqrt{3} + \frac{(10-2x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}x^2\sqrt{3} + (5-x)^2\sqrt{3}$$

$$f(x) = \sqrt{3} \left(\frac{3}{2}x^2 + x^2 - 10x + 25 \right) = \sqrt{3} \left(\frac{5}{2}x^2 - 10x + 25 \right)$$



$$x \in (0, 5)$$

$$p = -\frac{b}{2a}$$



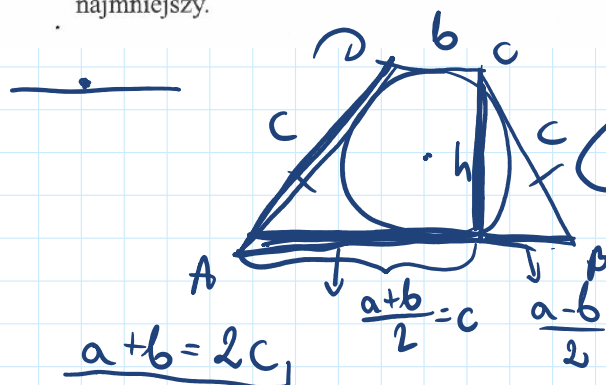
Zadanie 14.16. [matura, maj 2018, zad. 15. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

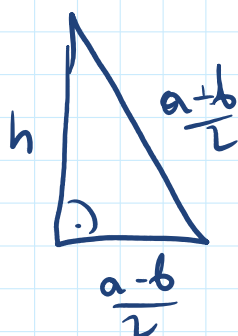
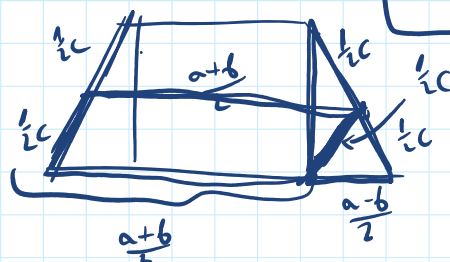
- a) Wyznacz wszystkie wartości a , dla których istnieje trapez o podanych własnościach.
 b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu,

wyraża się wzorem $L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$.

- c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.



$a > 0, h > 0 \Rightarrow a > 1$
 $a + h = 2$
 $r_0 = \frac{1}{2}h$
 $a \in (1, 2)$



$$h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 =$$

$$h^2 = ab$$

$$h^2 = (2-h)b$$

$$b = \frac{h^2}{2-h} = \frac{(2-a)^2}{2-2+a} =$$

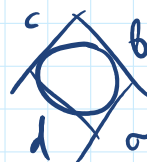
$$h = 2-a$$

$$L = 2(a+b) = 2\left(2-h + \frac{h^2}{2-h}\right) =$$

$$L(a) =$$

$$b = \frac{h^2}{2-h} \quad \leftarrow \quad h = 2-a$$

$$L(a) = \frac{(2-a)^2}{a}$$



$$a+c=b+d$$



$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

PTOLEMEJANA
 $a \cdot c + b \cdot d = d_1^2 + d_2^2$

$$b = \frac{(1-a)^2}{}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$