

piątek, 17 grudnia 2021 13:49

$$\left( \frac{3x^2 - 5x + 9}{x} \right)' =$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

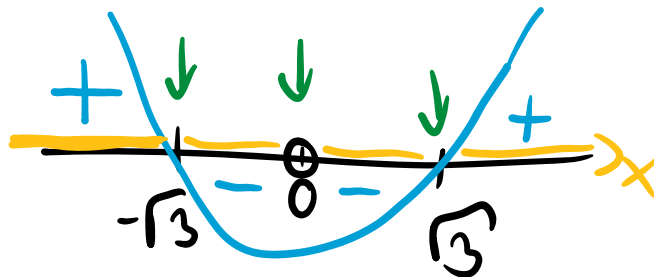
WK ist. ekstrem

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

WW ist. ekstrem      zmiana znaku pochodnej

1) Rysujemy wykres pod

$$f'(x) = \frac{3(x^2 - 3)}{x^2} > 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 9$$



2) TABELKA

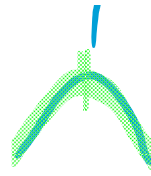
| x                     | $(-\infty, -\sqrt{3})$ | $-\sqrt{3}$ | $(-\sqrt{3}, 0)$ | $0$ | $(0, \sqrt{3})$ | $\sqrt{3}$ | $(\sqrt{3}, +\infty)$ |
|-----------------------|------------------------|-------------|------------------|-----|-----------------|------------|-----------------------|
| znak $f'(x)$          | +                      | 0           | -                | X   | -               | 0          | +                     |
| monotoniczność $f(x)$ | $\nearrow$             | max         | $\searrow$       | X   | $\searrow$      | min        | $\nearrow$            |

$f' \rightarrow f' +$   
 $f' \rightarrow f' -$

$\nearrow \searrow$   
 $\rightarrow \rightarrow$

$\dots \rightarrow 18 + 5\sqrt{3} \dots$

$$y_{\max} = f(-\sqrt{3}) = \frac{18 + 5\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \underline{\underline{-(6\sqrt{3} + 5)}}$$



$$y_{\min} = f(\sqrt{3}) = \frac{18 - 5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \Rightarrow f \nearrow$$

$$x \in (-\sqrt{3}; 0) \Rightarrow f \searrow$$

$$x \in (0, \sqrt{3}) \Rightarrow f \searrow$$

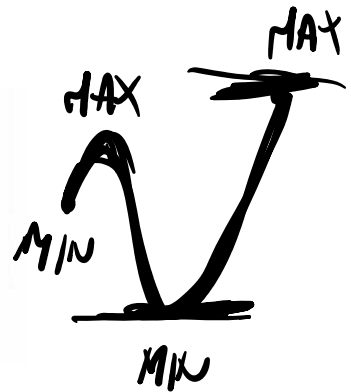
$$x \in (\sqrt{3}; +\infty) \Rightarrow f \nearrow$$

**2.105.** Wyznacz wartości (o ile istnieją) funkcji  $f$ : największą ( $M$ ) i najmniejszą ( $m$ ) w podanym zbiorze:

a)  $f(x) = \frac{x^2}{4+x}, x \in (-10, -5) \cup (-3, 5)$     b)  $f(x) = \frac{1-x^2}{x-3}, x \in (-5, 3)$

c)  $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}, x \in (0, 10)$

d)  $f(x) = \frac{1}{x^2-4}, x \in (1, 2) \cup (2, 3)$



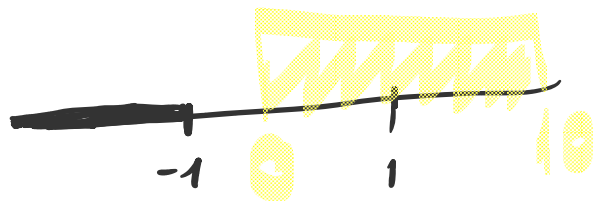
$$f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$$

$$D: x \in (0, 10)$$

$$f'(x) = \left( \frac{10x}{x^2+1} \right)' = \frac{-10(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

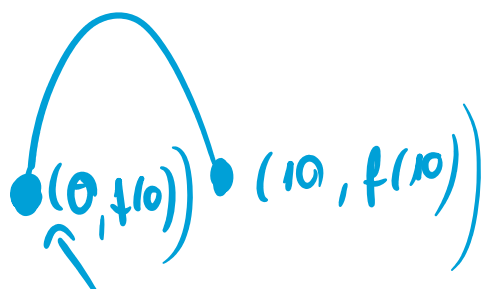
$$WK: f'(x) = 0 \Leftrightarrow -10(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$$

WW: znaki  $f'(x)$



| $x \in (0, 1)$ | 1 | $(1, 10)$ | $x \in (0, 10)$ |
|----------------|---|-----------|-----------------|
| $f'$           | + | -         |                 |

$y_{\max} = f(1)$   
 $y_{\max} = 5$   
 brak  $y_{\min}$   
 $y_{\min} = \text{nie istnieje}$

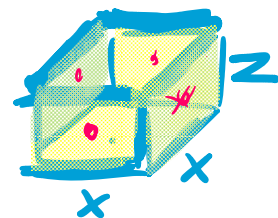




$$\boxed{x, z}$$

$$y = f(x)$$

2.116. Należy wykonać skrzynię w kształcie prostopadłościanu (bez górnego wieka), którego podstawa jest kwadratem. Pojemność skrzyni ma być równa 32 litry. Jakie wymiary (w centymetrach) powinno mieć to pudełko, aby jego pole powierzchni było najmniejsze?



$$V = 32 \text{ dm}^3 = P_p \cdot H$$

$$\boxed{32 = x^2 \cdot z}$$

$$\boxed{32 = x^2 \cdot z}$$

$P_p$  - ma być najmniejsze dla jakich  $x$  i  $z$

$$P_p = 4x \cdot z + x^2$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $x \quad z \quad x$

$$\underline{4(x \cdot z) = 4xz}$$

$$\boxed{32 = x^2 \cdot z} \Rightarrow z = \frac{32}{x^2}$$

$$P(x) = 4x \cdot \frac{32}{x^2} + x^2$$

$$\boxed{P(x) = 128 \frac{1}{x} + x^2}$$

$$\textcircled{II}: x \in \mathbb{R}_+$$

3p

$$f'(x) = -\frac{128}{x^2} + 2x = \frac{-128 + 2x^3}{x^2} = \frac{2(x^3 - 64)}{x^2}$$

$$\textcircled{II}: x \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{WK: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x^3 - 64) = 0 \quad x^3 = 64 \quad x = 4$$

$$\text{WL: znak } f'(x)$$

$\frac{2(x^3 - 64)}{x^2}$   
 $\frac{2x^3 - 64}{x^2}$

$\frac{2x^3 - 64}{x^2}$   
 $\frac{2x^3 - 64}{x^2}$

1p

2p

$$x \in (0, 4) \mid 4 \mid (4, +\infty)$$

| $x \in (0, 4)$ | $4$        | $(4, +\infty)$ |
|----------------|------------|----------------|
| $P'$           | $-$        | $+$            |
| $P$            | $\searrow$ | $\nearrow$     |

$$\underline{P_{\min} = P(4)} \quad 1p$$

Pole najmniejsza dl  $x = 4$  i  $2 = \frac{32}{x^2} = 2$

$7p$

$$240 - 5x > 0$$

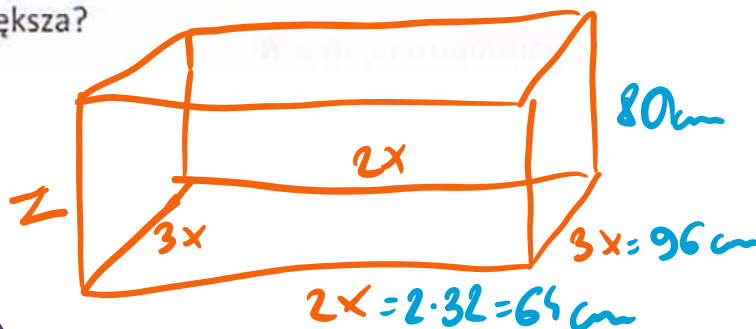
$$x < \frac{240 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{240 \cdot 2}{10} = \textcircled{48}$$

**2.120.** Z kawałka kątownika mającego długość 9,6 m zrobiono szkielet akwarium, w którym stosunek długości krawędzi podstawy jest równy 2 : 3. Jakie są wymiary tego akwarium, jeśli jego objętość jest największa?

$$960 = 4z + 20x$$

$$240 = z + 5x$$

$$z = 240 - 5x > 0$$



$$V = 6x^2(240 - 5x) \quad \textcircled{2p}$$

$$V(x) = 1440x^2 - 30x^3 \quad \textcircled{\text{II}}: x \in (0; 48) \quad \textcircled{1p}$$

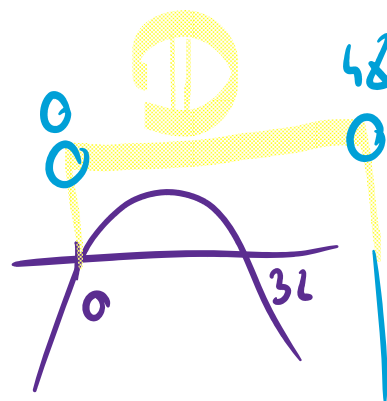
$f(x) = V_{\max}$  dla jakich  $x, z$ ?

$$f'(x) = V'(x) = 2880x - 90x^2 = -90x(x - 32)$$

$$VV: f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 32$$

Wk:

| $x \in$ | $(0, 32)$ | $32$     | $(32, 48)$ |
|---------|-----------|----------|------------|
| $f'$    | +         | 0        | -          |
|         |           | ↑<br>MAX | ↓          |



$V_{\max}$  dla  $x = 32 \text{ cm}$

$$z = 240 - 5x = 240 - 160 = \textcircled{80}$$

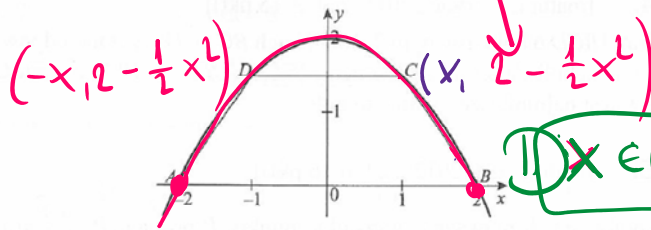
$$32 \cdot 5 = 16 \cdot 2 \cdot 5$$

$$16 \cdot 10 =$$



**Zadanie 14.11.** [matura, maj 2016, zad. 16. (7 pkt)]

Parabola o równaniu  $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$  przecina oś  $Ox$  układu współrzędnych w punktach  $A = (-2, 0)$  i  $B = (2, 0)$ . Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne  $ABCD$ , których dłuższą podstawą jest odcinek  $AB$ , a końce  $C$  i  $D$  krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek).

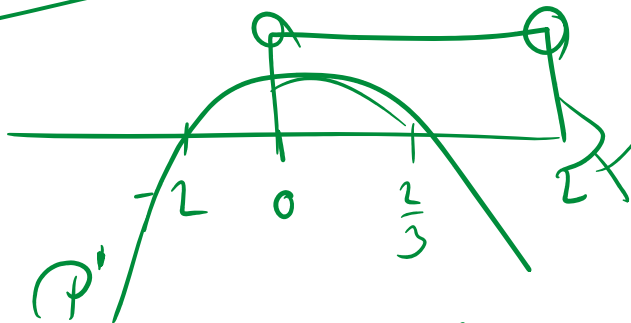


$x \in (0, 2)$

Wyznacz pole trapezu  $ABCD$  w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka  $C$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$  tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

$P_T = \frac{a+b}{2} \cdot h =$

$P = -\frac{1}{2}x^3$



| $x$  | $(0, \frac{2}{3})$ |     |            |
|------|--------------------|-----|------------|
| $P'$ | +                  | 0   | -          |
| $P$  | $\nearrow$         | max | $\searrow$ |

dl  $x = \frac{2}{3}$  Pole jest max

$2 - \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$

$C(\frac{2}{3}, \frac{16}{9})$



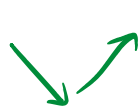
$y = ax^2 + bx + c$



$\sqrt{ax^2} = \sqrt{2x^2} = 2x$   
 $(x, 2 - \frac{1}{2}x^2)$   
 $(1, 2 - \frac{1}{2} \cdot 1)$

$\sqrt{ax^2} = |a|$

$x = \frac{2}{3}$

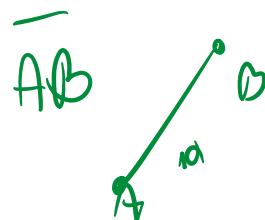
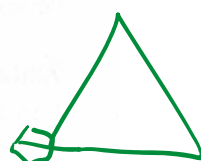
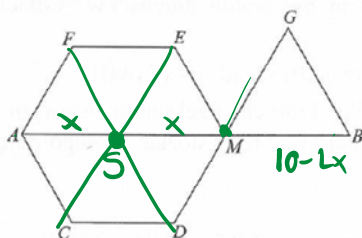


Ma być MIN

$$|AB| = 10$$

**Zadanie 14.13.** [matura, czerwiec 2016, zad. 8 swe. (5 pkt)]

Dany jest odcinek  $AB$  o długości 10. Rozpatrujemy wszystkie sześciokąty foremne  $ACDMEF$  i trójkąty równoboczne  $MBG$ , których wspólny wierzchołek  $M$  leży na odcinku  $AB$  (zobacz rysunek).

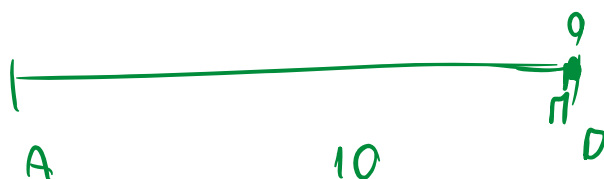


Oblicz stosunek obwodu sześciokąta  $ACDMEF$  do obwodu trójkąta  $MBG$  w przypadku, gdy suma pól tych dwóch wielokątów jest najmniejsza.

$$|AB| = 10$$

$$(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

$$f(x) = P_{\text{sz}} + P_{\Delta}$$



$$D_f: x \in (0, 5)$$

$$f'(x)$$

$$\left( c \cdot f(x) \right)' = c \cdot f'(x)$$

$$\frac{x^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2$$

$$3\sqrt{3} \cdot x$$

$$(\sqrt{3} x^2)'$$

$$f'(x)$$

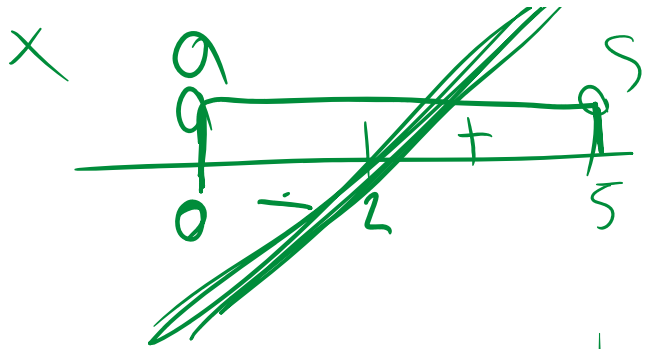
x

a



$$(13x^2)$$

$$f'(x)$$



$$f'(x) = 3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}x - 10\sqrt{3}$$

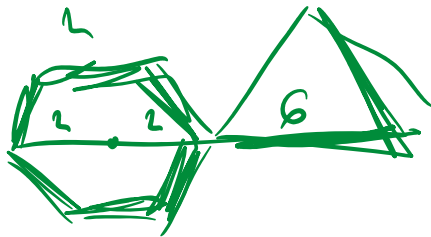
$$(f'(x) = 5\sqrt{3}x - 10\sqrt{3}) \text{ f. linear } a > 0 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{3}x = 10\sqrt{3}$$

$$x = 2$$

| x  | (0, 2) | 2 | (2, 5) |
|----|--------|---|--------|
| f' | -      | 0 | +      |
| f  | ↘      |   | ↗      |

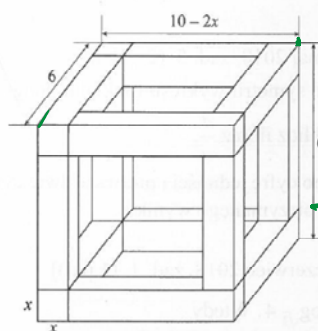
da  $x = 2$  sup ma mf



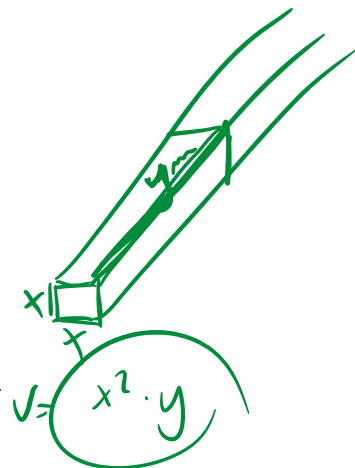
$$\frac{0_6}{0_3} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

**Zadanie 14.17** [matura, czerwiec 2018, zad. 15. (7 pkt)]

Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostokątnościenu o podstawie kwadratu o boku długości  $x$ . Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.



$$2 \left( \frac{2 \cdot (10 - 2x)}{2(6 - 2x)} + \right) + 4 \cdot (6 - 2x)$$



- Wyznacz objętość  $V$  drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej  $x$ .
- Wyznacz dziedzinę funkcji  $V$ .
- Oblicz tę wartość  $x$ , dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcieńszy, czyli kiedy funkcja  $V$  osiąga wartość największą. Oblicz tę największą objętość.

$$8(6 - 2x) + 4(10 - 2x)$$

$$2 \left( 2(10 - 2x) + 2(6 - 2x) \right) + 4(6 - 2x)$$

$$4(10 - 2x) + 4(6 - 2x) + 4(6 - 2x)$$

$$4 \cdot (10 - 2x) + 8(6 - 2x)$$

$$40 - 8x + 48 - 16x = (88 - 24x) = 4$$

$$V = x^2 \cdot (88 - 24x)$$

✓

## Zadanie 1. (0–1)

Ciąg  $(a_n)$  jest określony w następujący sposób:  $a_1 = 5$  i  $a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n + n - 1$ , jeśli  $n \in \mathbb{N}_+$ . Czwarty wyraz tego ciągu jest równy:

A. 2,72

B. 2,88

C. 3,64

D. 4,28

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram showing the sequence definition: } a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n + n - 1 \\
 & \text{Red arrows indicate the substitution of } n=3 \text{ to find } a_4. \\
 & \text{Handwritten notes: } n+1=4, \underline{n=3} \\
 & \text{Labels: } a_4, a_3 =, \cup(4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Handwritten notes: } (x-4), (x-a) \\
 & \text{Underlined: } (x-a)
 \end{aligned}$$

$$(x-a)$$

## Zadanie 2. (0–1)

Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = 2x^3 + x^2 - 3$  przez wielomian  $P(x) = \frac{1}{2}x - 2$  jest równa:

A. 17

B. -2,5

C. 141

D. 147

$$\frac{W(x)}{P(x)} = \frac{4x^3 + x^2 - 3}{(x-4)} =$$

$$W(4) =$$

$$(2x^3 + x^2 - 3) : \frac{1}{2}x - 2$$

## CZĘŚĆ TEORETYCZNA

$$W(x) = x^3 + 4x$$

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

**UWAGA.** W podstawie programowej pojęcie *wielomian* występuje tylko w zakresie rozszerzonym.

$$a=1 \quad c=4 \\ b=0 \quad d=0$$

## RÓWNOŚĆ WIELOMIANÓW

⇒ Dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej.

RESZTA Z DZIELENIA WIELOMIANU PRZEZ DWUMIAN  $x - a$ 

⇒ Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $x - a$  jest równa  $W(a)$ .

## PIERWIASTEK WIELOMIANU

⇒ Liczbę  $a$  nazywamy pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $W(a) = 0$ .

⇒ Wielomian  $W(x)$  stopnia  $n$ , który ma  $n$  pierwiastków:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , można zapisać w postaci  $W(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ , gdzie  $a$  jest liczbą.

$$x_1 \text{ d.h. } W(x_1) = 0$$

Np. jeżeli liczby  $-3, 1, 7$  są pierwiastkami wielomianu  $W(x) = 5x^3 + bx^2 + cx + d$ , to wielomian  $W(x)$  można zapisać w postaci  $W(x) = 5(x + 3)(x - 1)(x - 7)$ .

## TWIERDZENIE BÉZOUT

⇒ Wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumian  $x - a$  wtedy i tylko wtedy, gdy liczba  $a$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$ .

## WYMIERNE PIERWIASTKI WIELOMIANU O WSPÓŁCZYNNIKACH CAŁKOWITYCH

Niech  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  będą liczbami całkowitymi i  $a_n \neq 0$ .

⇒ Jeśli równanie  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$  ma pierwiastek całkowity  $c$ , to  $c$  jest dzielnikiem wyrazu wolnego  $a_0$ .

⇒ Jeśli równanie  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$  ma pierwiastek wymierny  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $\frac{p}{q}$  jest ułamkiem nieskracalnym, to  $p$  jest dzielnikiem wyrazu wolnego  $a_0$ , zaś  $q$  jest dzielnikiem współczynnika  $a_n$ .

$$W(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$W(x) = (x - 3)(x - 2)$$

$$x = 3 \text{ pierwiastek } W(x) \Rightarrow$$

**Zadanie 3. (0-1)**

Okrąg  $o: (x - 70)^2 + (y + 27)^2 = 4$  jest styczny do prostej opisanej równaniem:

A.  $3x + 4y = 0$

B.  $5x + 12y = 0$

C.  $x + y = 0$

D.  $y = -\frac{5}{6}x$

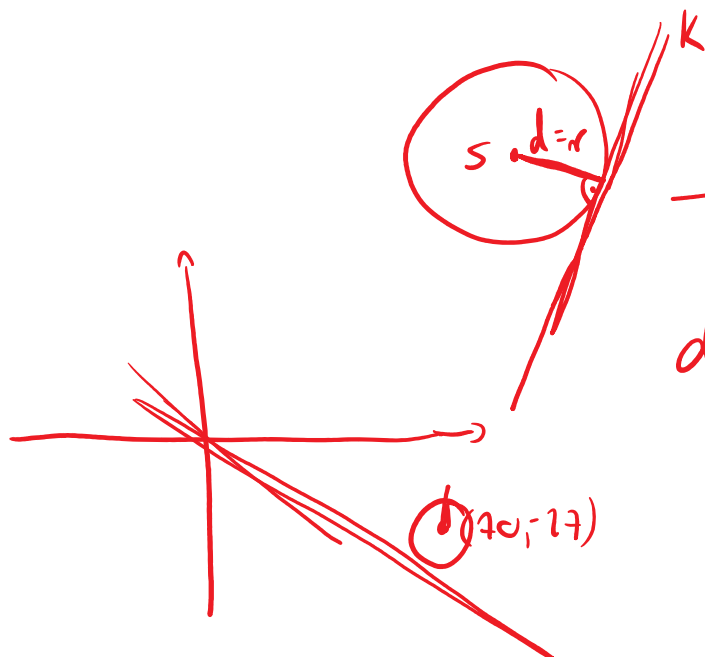
$A=3 \quad B=4 \quad C=0$

✓  $(x - 70)^2 + (y + 27)^2 = 4$

$y = -\frac{3}{4}x$   $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$$S(a, b) = (\overset{x_s}{70}, \overset{y_s}{-27})$$

$$r = 2$$



$d(S, k) = r$

$$d = \frac{|Ax_s + By_s + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{13 \cdot 70 + 4(-27) + 0}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

~~$\frac{1210 - 108}{8} \neq 2$~~

$5x + 12y = 0$

$$\overset{x_s}{(70, \overset{y_s}{-27})}$$

$$\frac{12 \cdot 27}{270 + 54} \quad 324$$

$$d = \frac{|350 - 12 \cdot 27|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{126}{13} = 2 \quad \text{OK}$$

**Zadanie 4. (0-1)**Liczba  $\cos\left(-\frac{67}{6}\pi\right)$  jest równa:

A.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

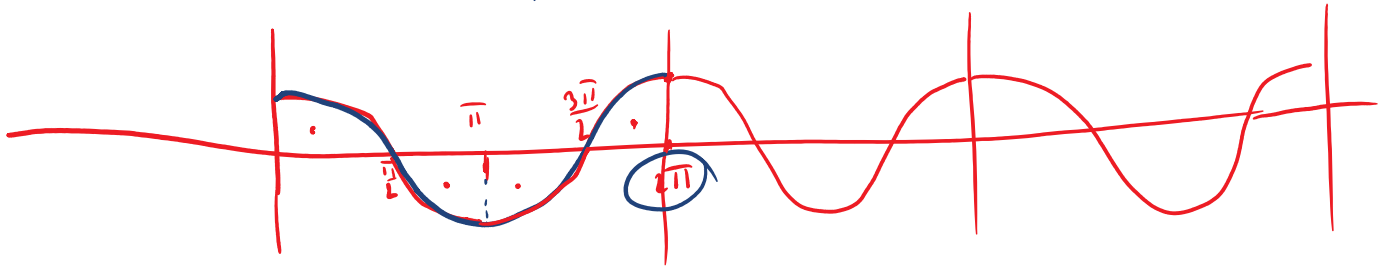
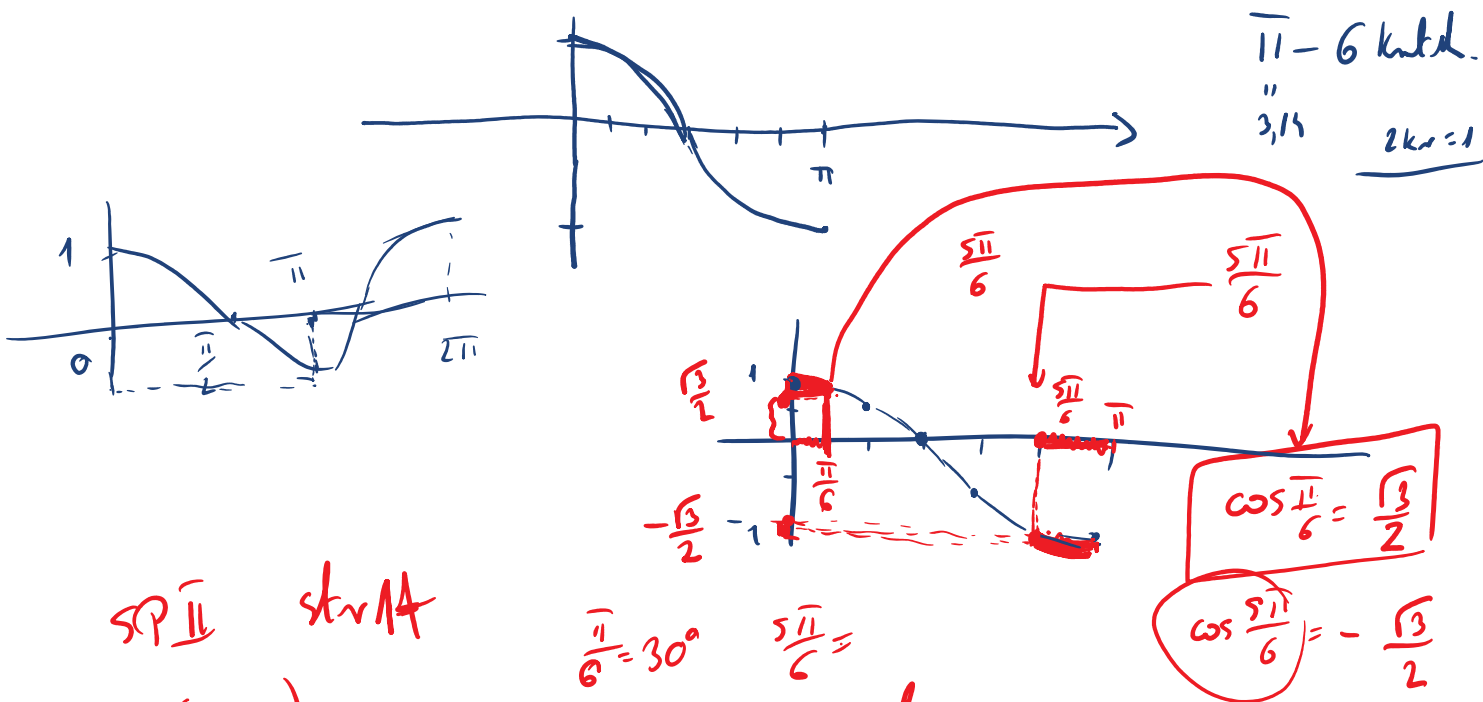
B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C.  $-\frac{1}{2}$

D.  $\frac{1}{2}$

$$\left[-\frac{67}{6}\right] = -\frac{60}{6} - \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = -11\frac{1}{6} = -12 + \frac{5}{6}$$

$$\cos\left(-\frac{67}{6}\pi\right) = \cos\left(-12\pi + \frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \cos\left(\right)$$

Określenie dla sin i cos jest  $2\pi$  ("pełny")

SP 11 skv 14

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos$$

$$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\frac{5\pi}{6} =$$

$$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$$

stopnie

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

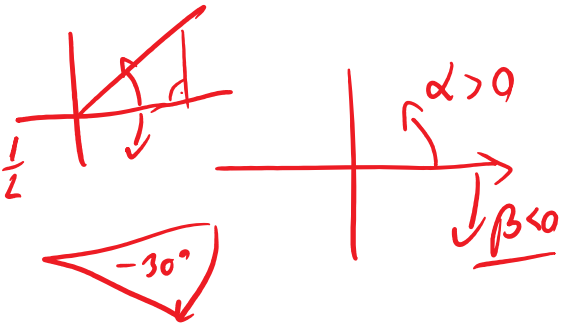


$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - \underline{30^\circ}) = -\cos 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(210^\circ) = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) =$$



$$\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \cos(300^\circ) = \cos(180^\circ + 120^\circ) = -\cos(120^\circ) =$$

$$-\cos(180^\circ - 60^\circ) = \underline{\cos 60^\circ} = \frac{1}{2}$$

## Zadanie 5. (0-1)

Funkcja homograficzna  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ , gdzie  $x \neq -1$ , jest:

- ☒ A. rosnąca w zbiorze  $\mathbb{R} - \{-1\}$   
☒ B. malejąca w zbiorze  $\mathbb{R} - \{-1\}$   
☐ C. malejąca w każdym z przedziałów  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, +\infty)$   
☒ D. rosnąca w każdym z przedziałów  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, +\infty)$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

gdzie  $ad - bc \neq 0$

postaci ogólnej

$$f(x) = \frac{a}{x-p} + q$$

NIE MA  
x u licha

$$\frac{a}{x-p} + q$$

$2x+2$

$2x-1$

$$y = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1}$$

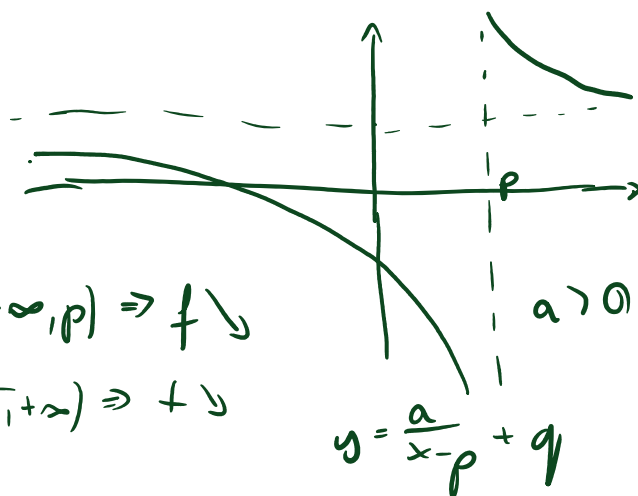
- 1) przepisać mianownik u lichu
- 2) wyrównać x: budujemy ( ) i mnożymy równy x
- 3) Wyrównujemy wyrazy wolne poza nawiasem dodawaniem

$$x \in (-\infty, p) \Rightarrow f \uparrow$$

$$x \in (p, +\infty) \Rightarrow f \uparrow$$



$S(p, q)$  - small  
syntetyzujący  
- punkt przecięcia w  
asymptot



$$x \in (-\infty, p) \Rightarrow f \downarrow$$

$$x \in (p, +\infty) \Rightarrow f \downarrow$$

$$y = \frac{a}{x-p} + q$$

$$f(x) = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = \frac{2(x+1)}{x+1} + \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{x+1} + 2$$

$$f(x) = \frac{-3}{x+1} + 2$$

$$a = -3$$

$$p = -1$$

$$q = 2$$

$$S(-1, 2)$$

$$x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f \uparrow$$



$$+ \dots x - p \quad V$$

$$q \sim$$

$$x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f \nearrow$$

$$x \in (-1, +\infty) \Rightarrow f \nearrow$$

$$y = \frac{3x+2}{x-1}$$

**6.172.** Każdy z wykresów funkcji, których wzory podano poniżej, otrzymano w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$ , gdzie  $a \neq 0$ , o wektor  $\vec{u} = [p, q]$ . Wyznacz  $a$ ,  $p$  oraz  $q$ .

a)  $y = \frac{2x-3}{x+1}$

b)  $y = \frac{-3x-6}{x-2}$

c)  $y = \frac{4x+4}{8x+1}$

d)  $y = \frac{3x}{6x-3}$

e)  $y = \frac{x-5}{4x}$

f)  $y = \frac{2x-9}{5x-1}$

**6.173.** Naskicuj wykres funkcji homograficznej  $F$ . Omów jej własności, jeśli:

a)  $F(x) = \frac{x+1}{x-1}$

b)  $F(x) = \frac{-3x-5}{x+2}$

c)  $F(x) = \frac{x-1}{x-4}$

d)  $F(x) = \frac{2x+4}{x+3}$

**6.178.** Dla jakich argumentów, funkcja:

a)  $F(x) = \frac{x+3}{x-2}$  przyjmuje wartości większe niż funkcja  $G(x) = \frac{x-5}{x+2}$

b)  $H(x) = \frac{x-1}{x+5}$  przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja  $G(x) = \frac{x+6}{x-1}$ ?

**6.179.** Zbadaj, na podstawie definicji, monotoniczność funkcji homograficznej w podanym obok zbiorze, jeśli:

a)  $F(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $A = (-\infty, 1)$

b)  $G(x) = \frac{-x-5}{x+2}$ ,  $B = (-2, +\infty)$

c)  $H(x) = \frac{-2x+9}{x-4}$ ,  $C = (-\infty, 4)$

d)  $P(x) = \frac{-6x+18}{x+3}$ ,  $D = (-3, +\infty)$

**6.183.** Funkcja  $F$  jest funkcją homograficzną określoną wzorem  $F(x) = \frac{2x+b}{x-3}$ . Wyznacz wartość współczynnika  $b$ , jeśli wiadomo, że dla argumentu  $\sqrt{3}$  wartość funkcji wynosi  $-1\frac{1}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{6}$ . Następnie sprawdź, czy do wykresu funkcji  $F$  należy punkt  $B(\sqrt{2}+4, 7\sqrt{2}-5)$ .

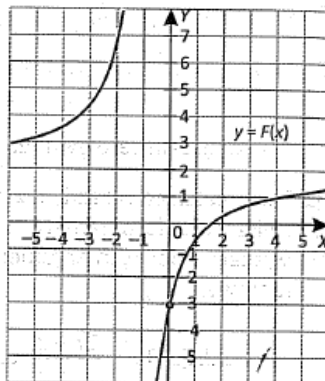
**6.184.**

- a) Naskicuj wykres funkcji  $F(x) = \left| -2 + \frac{3}{x+1} \right|$ , gdzie  $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ .
- b) Ustal, dla jakich wartości parametru  $m$  ( $m \in \mathbb{R}$ ), równanie  $F(x) = \frac{m+3}{m+2}$  ma dwa rozwiązania różnych znaków.

**6.185.** Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji homograficznej  $F(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ , gdzie  $x \neq -c$  i  $ac-b \neq 0$ .

Korzystając z tego rysunku oraz wiedząc, że do wykresu funkcji  $F$  należy punkt  $A(0, -3)$ , wyznacz:

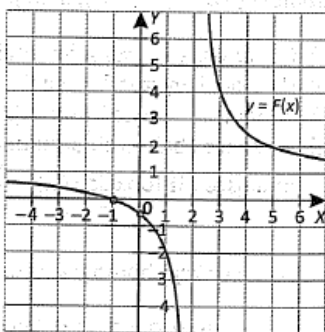
- a) wartości współczynników  $a, b, c$
- b) zbiór tych argumentów, dla których funkcja  $F$  przyjmuje wartości ujemne.



**6.186.** Na rysunku obok przedstawiony jest wykres funkcji homograficznej  $F(x) = \frac{ax+1}{cx+d}$ , gdzie  $x \neq -\frac{d}{c}$  i  $ad-c \neq 0$ .

Korzystając z tego rysunku oraz wiedząc, że miejscem zerowym funkcji  $F$  jest liczba  $-1$ , zaś wykres funkcji  $F$  ma z osią  $OY$  punkt wspólny  $(0, -\frac{1}{2})$ , wy-

znaczyć wartości współczynników  $a, c, d$ . Następnie rozwiąż równanie  $F(x) + 0,5 \cdot (x-1)^2 = 2$ .



## Zastosowanie wiadomości o funkcji homograficznej w zadaniach

**6.180.** Miejscem zerowym funkcji homograficznej  $F(x) = \frac{a-x}{x+b}$  jest liczba 3. Funkcja  $F$  jest malejąca w każdym z przedziałów:  $(-\infty; -8)$ ,  $(-8; +\infty)$ .

- a) Oblicz wartości parametrów  $a$  i  $b$ .
- b) Wyznacz zbiór tych argumentów, dla których funkcja  $F$  przyjmuje wartości nie-dodatnie.

**6.181.** Funkcja  $F(x) = \frac{2x+b}{x+c}$  jest funkcją homograficzną, malejącą w każdym z przedziałów  $(-\infty; 1)$ ,  $(1; +\infty)$ , a do jej wykresu należy punkt  $A\left(9, 2\frac{1}{2}\right)$ .

- a) Oblicz wartości współczynników  $b$  i  $c$ .
- b) Naskicuj wykres funkcji  $F$ .
- c) Podaj zbiór wartości funkcji  $F$ .
- d) Wyznacz zbiór tych argumentów, dla których funkcja  $F$  przyjmuje wartości nie-mniejsze niż funkcja  $G(x) = \frac{x+5}{x-1}$ .

**6.182.** Funkcja homograficzna  $F$  jest określona wzorem  $F(x) = \frac{ax-1}{x-1}$ , a jej dzie-

niemniejże niż funkcja  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ .

**6.182.** Funkcja homograficzna  $F$  jest określona wzorem  $F(x) = \frac{ax-1}{x+b}$ , a jej dziedziną jest zbiór  $D = \mathbb{R} - \{3\}$ . Wiedząc, że miejscem zerowym funkcji jest liczba  $\frac{1}{2}$ :

- a) oblicz wartości współczynników  $a$  i  $b$
- b) wyznacz zbiór wartości funkcji  $F$
- c) naszkicuj wykres funkcji  $F$ .